加法的/非加法的測度論

第12回符号付測度とRadon-Nikodymの定理

定義 12.1 $(X,\mathscr{F})$を可測空間とする.

(1) $\nu:\mathscr{F}\to\mathbb{R}$が$(X,\mathscr{F})$上の有限符号付測度 $\overset{\Delta}{\iff}$ νが次のσ-加法性をもつ.

(σ-加法性) $A_1,A_2,\ldots\in\mathscr{F}$が互いに素 $\Rightarrow \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(A_n)$.

(2) $\nu:\mathscr{F}\to\overline{\mathbb{R}}$が$(X,\mathscr{F})$上の符号付測度 $\overset{\Delta}{\iff}$
$\nu:\mathscr{F}\to\,]-\infty,+\infty]$または$\nu:\mathscr{F}\to[-\infty,+\infty[$で，$\sigma$-加法性をもち，$\nu(\varnothing)=0$である.

(3) $\{A_k\}_{k=1}^{n}$が$A\in\mathscr{F}$の有限可測分割

$$\overset{\Delta}{\iff}\left[\{A_k\}_{k=1}^{n}\subset\mathscr{F}\text{ かつ }A_i\cap A_j=\varnothing\ (i\neq j)\text{ かつ }A=\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right]$$

$\mathscr{P}(A)\triangleq\{\mathscr{P}\mid\mathscr{P}$は$A$の有限可測分割$\}$

(4) $(X,\mathscr{F})$上の符号付測度$\nu:\mathscr{F}\to\overline{\mathbb{R}}$に対し

$$|\nu|(A)\triangleq\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|\nu(A_k)|\ \middle|\ \{A_k\}_{k=1}^{n}\in\mathscr{P}(A)\right\}\quad(A\in\mathscr{F})$$

とおく. $\|\nu\|\triangleq|\nu|(X)$を$\nu$の全変動という.

註 定義から, $|\nu|$は非負かつ単調, $|\nu|(\varnothing)=0,\nu$が通常の測度のとき$|\nu|=\nu$.

定理 12.1 ν が $(X, \mathscr{F})$ 上の有限符号付測度であるとき, $|\nu|$ は有限測度である.

略証 まず, $|\nu(A)| \leq M \ (\forall A \in \mathscr{F})$ なる $M \geq 0$ の存在を示す（これが示せれば,
$|\nu|(X) = \sup\{\sum_{k=1}^{n} |\nu(A_k)| \mid \{A_k\}_{k=1}^{n} \in \mathscr{P}(X)\} \leq 2M < +\infty$ となる）.
$A \in \mathscr{F}$ に対して,

$$\lambda(A) \triangleq \sup\{\nu(B) \mid B \in \mathscr{F} \cap A\} = \sup\{\nu(B) \mid A \supset B \in \mathscr{F}\}$$

と定義する. $\lambda(A) = +\infty$ なる $A \in \mathscr{F}$ があれば,
任意の $B \in \mathscr{F} \cap A$ について $\lambda(B) = +\infty$ または $\lambda(A \setminus B) = +\infty$ である. なぜなら,
もし, ある $B \in \mathscr{F} \cap A$ について $\lambda(B) < +\infty$ かつ $\lambda(A \setminus B) < +\infty$ とすると,
任意の $C \in \mathscr{F} \cap A$ に対し $\nu(C \cap B) \leq \lambda(B), \nu(C \setminus B) \leq \lambda(A \setminus B)$ なので

$$\nu(C) = \nu(C \cap B) + \nu(C \setminus B) \leq \lambda(B) + \lambda(A \setminus B)$$

であるから, C の任意性より

$$\lambda(A) = \sup\{\nu(C) \mid C \in \mathscr{F} \cap A\} \leq \lambda(B) + \lambda(A \setminus B) < +\infty$$

となって, $\lambda(A) = +\infty$ に矛盾するからである. （次のスライドに続く）

定理 12.1 ν が $(X,\mathscr{F})$ 上の有限符号付測度であるとき, $|\nu|$ は有限測度である.

略証の続き $|\nu(A)| \le M\ (\forall A \in \mathscr{F})$ なる $M \ge 0$ の存在を示そうとしている.

$$\lambda(A) \triangleq \sup\{\nu(B) \mid B \in \mathscr{F} \cap A\} \qquad (A \in \mathscr{F})$$

と定義し, $\lambda(A) = +\infty$ なる $A \in \mathscr{F}$ があれば, $B \subset A$ なる任意の $B \in \mathscr{F}$ について $\lambda(B) = +\infty$ または $\lambda(A \setminus B) = +\infty$ であることを示した. 次に, $\lambda(X) < +\infty$ であることを背理法により示す. $\lambda(X) = +\infty$ と仮定すると, $\nu(B_1) > 1$ なる $B_1 \in \mathscr{F}$ が存在する.
このとき, 先に示したことから $\lambda(B_1) = +\infty$ または $\lambda(X \setminus B_1) = +\infty$ である.
$\lambda(B_1) = +\infty$ ならば $A_1 \triangleq B_1$ とし, そうでなければ $A_1 \triangleq X \setminus B_1$ とする.
帰納的にこの操作を繰り返すことにより, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $B_{n+1} \in \mathscr{F} \cap A_n$ を, $\nu(B_{n+1}) > n+1$ で, $\lambda(B_{n+1}) = +\infty$ ならば $A_{n+1} \triangleq B_{n+1}$, そうでなければ $A_{n+1} \triangleq A_n \setminus B_{n+1}$ となるように定めることができる. ここで 2 つの場合が考えられる.
1 つは $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \ge N$ のとき $A_n = B_n$ となる場合である. このときは, $B_N \supset B_{N+1} \supset \cdots$ であり, $A \triangleq \bigcap_{n=N}^{\infty} B_n$ とおくと $A \in \mathscr{F}$ であって, 有限符号付測度が上から連続であることは測度の場合とまったく同様に示せるので,

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(B_n) = +\infty$$

となり, ν が有限値であることに矛盾する. もう一つの場合は, 無限個の n に対して, $A_n = A_{n-1} \setminus B_n$ となる場合である. （次のスライドに続く）

定理 12.1 ν が $(X,\mathscr{F})$ 上の有限符号付測度であるとき，$|\nu|$ は有限測度である．

略証の続き $|\nu(A)| \leq M\ (\forall A \in \mathscr{F})$ なる $M \geq 0$ の存在を示そうとしている．

$$\lambda(A) \triangleq \sup\{\nu(B) \mid B \in \mathscr{F} \cap A\} \quad (A \in \mathscr{F})$$

と定義し，$\lambda(X) < +\infty$ であることを背理法で示すため，$\lambda(X) = +\infty$ と仮定した．このとき，
$\nu(B_1) > 1$ なる $B_1 \in \mathscr{F}$ が存在し，先に示したことから $\lambda(B_1) = +\infty$ または $\lambda(X \setminus B_1) = +\infty$ である．
$\lambda(B_1) = +\infty$ ならば $A_1 \triangleq B_1$ とし，そうでなければ $A_1 \triangleq X \setminus B_1$ とする．帰納的に
この操作を繰り返すことにより，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$B_{n+1} \subset A_n$ を，$\nu(B_{n+1}) > n+1$ で，
$\lambda(B_{n+1}) = +\infty$ ならば $A_{n+1} \triangleq B_{n+1}$，そうでなければ $A_{n+1} \triangleq A_n \setminus B_{n+1}$ となるように定めることが
できる．ここで 2 つの場合が考えられ，1 つ目の，$N \in \mathbb{N}$ が存在し，$n \geq N$ のとき $A_n = B_n$ と
なる場合については矛盾を導けた．そこで，もう一つの場合の，無限個の n に対して，
$A_n = A_{n-1} \setminus B_n$ となる場合について考える．このときは，$\{B_n\}$ の部分列 $\{B_{n_j}\}$ を
互いに素になるように取れるので，$A \triangleq \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{n_j}$ おくと，$A \in \mathscr{F}$ で

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu\left(B_{n_j}\right) \geq \sum_{j=1}^{\infty} n_j = +\infty$$

となって，ν が有限値であることに矛盾する．よって $\lambda(X) < +\infty$ が示された．
$-\nu$ に対して同じ議論をすることにより，$|\nu(A)| \leq M\ (\forall A \in \mathscr{F})$ なる $M \geq 0$ の存在が
示される．（次のスライドに続く）

定理 12.1 ν が $(X,\mathscr{F})$ 上の有限符号付測度であるとき, $|\nu|$ は有限測度である.

略証の続き あとは $|\nu|$ の σ-加法性を示せばよい. すなわち,
任意の互いに素な $\{A_k\}\subset\mathscr{F}$ に対して

$$|\nu|\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}|\nu|(A_k)$$

を示せばよい. 任意の $\varepsilon>0$ に対して, 各 A_k の有限可測分割 $\{A_{k,i}\}_{i=1}^{n_k}\in\mathscr{P}(A_k)$ を,

$$|\nu|(A_k)<\sum_{i=1}^{n_k}|\nu(A_{k,i})|+\frac{\varepsilon}{2^k}$$

となるようにとる. すると, 任意の $K\in\mathbb{N}$ に対して,

$$\sum_{k=1}^{K}|\nu|(A_k)<\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_k}|\nu(A_{k,i})|+\varepsilon\le|\nu|\left(\bigcup_{k=1}^{K}A_k\right)+\varepsilon\le|\nu|\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)+\varepsilon.$$

$\varepsilon>0$ と $K\in\mathbb{N}$ は任意だから

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\nu|(A_k)\le|\nu|\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)$$

となる. 次に逆向きの不等式を示す. （次のスライドに続く）

定理 12.1 ν が $(X,\mathscr{F})$ 上の有限符号付測度であるとき, $|\nu|$ は有限測度である.

略証の続き 次に, $\sum_{k=1}^{\infty}|\nu|(A_k) \leq |\nu|\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$ と逆の向きの不等式を示す.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ の有限可測分割 $\{B_j\}_{j=1}^{n} \subset \mathscr{F}$ が存在し

$$|\nu|\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{j=1}^{n}|\nu(B_j)| + \varepsilon$$

と書ける. このとき, $\{A_k \cap B_j \mid j = 1,2,\ldots,n\}$ は A_k の有限可測分割だから,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\nu|(A_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}|\nu(A_k \cap B_j)| \geq \sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\nu(A_k \cap B_j)\right| = \sum_{j=1}^{n}|\nu(B_j)| \geq |\nu|\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) - \varepsilon$$

となる. $\varepsilon > 0$ は任意だったから,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\nu|(A_k) \geq |\nu|\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right). \quad \text{(Q.E.D.)}$$

定理 12.2 〈Jordan分解〉有限符号付測度νに対し，有限測度ν_1, ν_2が存在して

$$\nu = \nu_1 - \nu_2.$$

略証 $\nu_1 \triangleq (|\nu| + \nu)/2,\ \ \nu_2 \triangleq (|\nu| - \nu)/2$ とおけばよい.

$$(2\nu_2(A) = |\nu|(A) - \nu(A) = \sup\{\textstyle\sum_{k=1}^{n} |\nu(A_k)| \mid \{A_k\}_{k=1}^{n} \in \mathscr{P}(A)\} - \nu(A) \geq \nu(A) - \nu(A) = 0)$$

(Q.E.D.)

註 Jordan分解は一意ではない.
なぜなら，同じ可測空間上の任意の有限測度μに対して

$$\nu = (\nu_1 + \mu) - (\nu_2 + \mu)$$

もJordan分解になるからである.

以下，

$$\nu^+ \triangleq \frac{|\nu| + \nu}{2}, \quad \nu^- \triangleq \frac{|\nu| - \nu}{2}$$

とおく. このとき, $|\nu| = \nu^+ + \nu^-,\ \ \nu = \nu^+ - \nu^-$ となっている.

補題 12.1 可測空間 $(X,\mathscr{F})$ 上の有限符号付測度 ν と任意の $E\in\mathscr{F}$ に対して

$$\nu^+(E)=\sup\{\nu(F)\mid F\in\mathscr{F}\cap E\},\ \ \nu^-(E)=-\inf\{\nu(F)\mid F\in\mathscr{F}\cap E\}.$$

略証 $\nu^+(E)=\sup\{\nu(F)\mid F\in\mathscr{F}\cap E\}$ だけを示せば十分である．定義式から $|-\nu|=|\nu|$ なので $(-\nu)^+=(|-\nu|+(-\nu))/2=(|\nu|-\nu)/2=\nu^-$ だから，このとき，$\nu^-(E)=(-\nu)^+(E)=\sup\{-\nu(F)\mid F\in\mathscr{F}\cap E\}=-\inf\{\nu(F)\mid F\in\mathscr{F}\cap E\}$ となるからである．

さて，$F\in\mathscr{F}\cap E$ に対して，$\nu(F)\le(\nu(F)+|\nu|(F))/2=\nu^+(F)\le\nu^+(E)$ だから，

$$\sup\{\nu(F)\mid F\in\mathscr{F}\cap E\}\le\nu^+(E).$$

定理 12.1 の証明と同様にして，任意の $\varepsilon>0$ に対して，
$E=F\cup G,\ F\cap G=\varnothing,\ \nu(F)\ge 0,\ \nu(G)\le 0$ となる対 $\{F,G\}\subset\mathscr{F}$ が存在して $|\nu|(E)\le\nu(F)-\nu(G)+\varepsilon$ と書ける．$\nu(E)=\nu(F\cup G)=\nu(F)+\nu(G)$ だから

$$\nu^+(E)=\frac{|\nu|(E)+\nu(E)}{2}\le\frac{\nu(F)-\nu(G)+\varepsilon+\nu(F)+\nu(G)}{2}=\nu(F)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

$\sup$ の定義と $\varepsilon>0$ の任意性から

$$\nu^+(E)\le\sup\{\nu(F)\mid F\in\mathscr{F}\cap E\}.$$

以上から，$\nu^+(E)=\sup\{\nu(F)\mid F\in\mathscr{F}\cap E\}$.　(Q.E.D.)

定理 12.3 $\langle$Hahn分解$\rangle$ $(X,\mathscr{F})$ 上の有限符号付測度 ν に対し，X の可測分割 $\{E,F\}$ が存在して

$$\nu(A)\ge 0\quad (\forall A\in\mathscr{F}\cap E)\quad \text{かつ}\quad \nu(B)\le 0\quad (\forall B\in\mathscr{F}\cap F).$$

略証 まず $\nu^+(X)=\nu(E)$ なる $E\in\mathscr{F}$ の存在を示す.
補題 12.1 より $\nu^+(X)=\sup\{\nu(E)\mid E\in\mathscr{F}\cap X\}$ なので，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $E_n\in\mathscr{F}$ が存在して

$$\nu^+(X)\ge\nu(E_n)\ge\nu^+(X)-\frac{1}{2^n}$$

とできる．$G\in\mathscr{F}\cap E_n$ に対して，$\nu(E_n)=\nu(G)+\nu(E_n\setminus G)$ だから

$$\nu(G)+\nu^+(X)\ge\nu(G)+\nu(E_n\setminus G)=\nu(E_n)\ge\nu^+(X)-\frac{1}{2^n}$$

である．よって，$\nu(G)\ge -1/2^n$ となるので，

$$\nu^+(X)\ge\nu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k\right)=\nu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}\left(E_k\setminus\bigcup_{j=n}^{k-1}E_j\right)\right)=\nu(E_n)+\nu(E_{n+1}\setminus E_n)+\nu(E_{n+2}\setminus(E_n\cup E_{n+1}))+\cdots$$

$$\ge\nu(E_n)-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+2}}-\cdots\ge\nu^+(X)-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+2}}-\cdots=\nu^+(X)-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

$A_n\triangleq\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k$ とおくと，$\{A_n\}$ は単調減少列だから，$E\in\mathscr{F}$ が存在して $A_n\downarrow E$ となる．したがって，

$$\nu^+(X)\ge\lim_{n\to\infty}\nu(A_n)\ge\nu^+(X)$$

より，$\nu^+(X)=\nu(E)$ となる．（次のスライドに続く）

定理 12.3 〈Hahn分解〉 $(X, \mathscr{F})$ 上の有限符号付測度 ν に対し，
X の可測分割 $\{E, F\}$ が存在して

$$\nu(A) \geq 0 \quad (\forall A \in \mathscr{F} \cap E) \quad \text{かつ} \quad \nu(B) \leq 0 \quad (\forall B \in \mathscr{F} \cap F).$$

略証の続き 前のスライドで $\nu^+(X) = \nu(E)$ なる $E \in \mathscr{F}$ の存在が示された．
このとき，任意の $A \in \mathscr{F} \cap E$ に対して，

$$\nu^+(X) = \nu(E) = \nu(A) + \nu(E \setminus A) \leq \nu(A) + \nu^+(X)$$

となるから，$\nu(A) \geq 0$ である．ここで，$F \triangleq X \setminus E$ とおくと，
$\{E, F\}$ は X の可測分割であり，任意の $B \in \mathscr{F} \cap F$ に対して，

$$\nu^+(X) \geq \nu(B \cup E) = \nu(B) + \nu(E) = \nu(B) + \nu^+(X)$$

であるから，$\nu(B) \leq 0$ となる．　(Q.E.D.)

註 $\{E_1, F_1\}$ と $\{E_2, F_2\}$ を X の2つのHahn分解とすると，任意の $A \in \mathscr{F}$ に対し

$$\nu(A \cap E_1) = \nu(A \cap E_2), \quad \nu(A \cap F_1) = \nu(A \cap F_2).$$