加法的/非加法的測度論

第9回 関数空間

定義 9.1 (1) $0 < p < +\infty$ とする. $f \in M(X, \mathscr{F}, \mu)$ に対して,

$$\|f\|_p \triangleq \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

とおく. $\|f\|_p < +\infty$ であるとき, f は p 乗可積分であるといい, それらすべてからなる集合を

$$L^p(X, \mathscr{F}, \mu) \triangleq \{ f \in M(X, \mathscr{F}, \mu) \mid \|f\|_p < +\infty \}$$

で表わす.

(2) $f \in M(X, \mathscr{F}, \mu)$ に対して,

$$\mathrm{ess.sup}\, f \triangleq \inf\{ \alpha \mid f \leq \alpha \ \ \mu\text{-a.e.} \},$$

$$\mathrm{ess.inf}\, f \triangleq \sup\{ \alpha \mid f \geq \alpha \ \ \mu\text{-a.e.} \}$$

と定義して, それぞれ f の本質的上限, 本質的下限という. さらに

$$\|f\|_\infty \triangleq \mathrm{ess.sup}\, |f|$$

と定義し, $\|f\|_\infty < +\infty$ であるとき, f は本質的有界関数といい, それらすべてからなる集合を

$$L^\infty(X, \mathscr{F}, \mu) \triangleq \{ f \in M(X, \mathscr{F}, \mu) \mid \|f\|_\infty < +\infty \}$$

と表わす.

<u>定理 9.1</u> $1 \le p \le +\infty$, $1 \le q \le +\infty$ とし, $1/p + 1/q = 1$ とする.

(1) 任意の $f \in L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ と $g \in L^q(X, \mathscr{F}, \mu)$ に対して, $fg \in L^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ であり,

$$\left| \int fg \, d\mu \right| \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

(2) 任意の $f, g \in L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ に対して,

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

<u>註</u> $1 < p < +\infty$ のとき, (1)をHölderの不等式, (2)をMinkowskiの不等式という.
特に, $p = 2$ のとき, (1)をSchwarzの不等式という.

<u>略証</u> (1) $p = 1$ のとき $q = +\infty$ であり, このとき $|g| \le \|g\|_\infty$ μ-a.e. であるから,

$$\int |fg| d\mu \le \int |f| \|g\|_\infty \, d\mu = \|g\|_\infty \int |f| d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1 < +\infty$$

より, $fg \in L^1(X, \mathscr{F}, \mu)$. 定理7.1 (12)から $\left| \int fg \, d\mu \right| \le \int |fg| d\mu$ なので, 上式より

$$\left| \int fg \, d\mu \right| \le \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

$p = +\infty$ のとき $q = 1$ であって, 証明は上と同様である. （次のスライドに続く）

<u>定理 9.1</u> $1 \le p \le +\infty$, $1 \le q \le +\infty$ とし, $1/p + 1/q = 1$ とする.

(1) 任意の $f \in L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ と $g \in L^q(X, \mathscr{F}, \mu)$ に対して, $fg \in L^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ であり,

$$\left| \int fg \, d\mu \right| \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

<u>略証の続き</u> (1) $0 < p < +\infty$ とする. $fg = 0$ μ-a.e. のときは明らかなので,
そうでないとする. $A \triangleq \{fg \ne 0\}$ とすると, $\mu(A) > 0$ であり, 任意の $x \in A$ に対して
$|f(x)| > 0$ かつ $|g(x)| > 0$ である. $\int_A |f|^p \, d\mu > 0$ かつ $\int_A |g|^q \, d\mu > 0$ であることから,

$$f' \triangleq \frac{|f|^p}{\int_A |f|^p \, d\mu}, \quad g' \triangleq \frac{|g|^q}{\int_A |g|^q \, d\mu}$$

とおける. 対数関数は凹関数なので, $r, s > 0, \alpha, \beta \ge 0, \alpha + \beta = 1$ に対して

$$\alpha \log r + \beta \log s \le \log(\alpha r + \beta s)$$

であり, 指数関数は単調増加であるから

$$r^\alpha s^\beta \le \alpha r + \beta s.$$

$x \in A$ について, 上式に $r = f'(x)$, $s = g'(x)$, $\alpha = 1/p$, $\beta = 1/q$ を代入して

$$f'(x)^{\frac{1}{p}} g'(x)^{\frac{1}{q}} \le \frac{1}{p} f'(x) + \frac{1}{q} g'(x)$$

を得る. （次のスライドに続く）

<u>定理 9.1</u> $1 \le p \le +\infty$, $1 \le q \le +\infty$ とし, $1/p + 1/q = 1$ とする.

(1) 任意の $f \in L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ と $g \in L^q(X, \mathscr{F}, \mu)$ に対して, $fg \in L^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ であり,

$$\left|\int fg\, d\mu\right| \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

<u>略証の続き</u> (1) $0 < p < +\infty$ かつ,「$fg = 0$ μ-a.e.」でないとして証明している.

$$A \triangleq \{fg \ne 0\}, \quad f' \triangleq \frac{|f|^p}{\int_A |f|^p\, d\mu}, \quad g' \triangleq \frac{|g|^q}{\int_A |g|^q\, d\mu}$$

とおいて,

$$f'(x)^{\frac{1}{p}} g'(x)^{\frac{1}{q}} \le \frac{1}{p} f'(x) + \frac{1}{q} g'(x) \quad (x \in A)$$

を得ている. さて, 上式を A 上で積分すると,

$$\int_A \frac{|f| \cdot |g|}{\left(\int_A |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_A |g|^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}} d\mu \le \frac{1}{p} \int_A \frac{|f|^p}{\int_A |f|^p\, d\mu} d\mu + \frac{1}{q} \int_A \frac{|g|^q}{\int_A |g|^q\, d\mu} d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

となるので,

$$\int |fg|\, d\mu \le \left(\int_A |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_A |g|^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

を得る. したがって, 定理7.1 (12)から

$$\left|\int fg\, d\mu\right| \le \int |fg|\, d\mu \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q. \quad \text{(Q.E.D.)}$$

<u>定理 9.1</u> $1 \le p \le +\infty$, $1 \le q \le +\infty$ とし, $1/p + 1/q = 1$ とする.

(1) 任意の $f \in L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ と $g \in L^q(X, \mathscr{F}, \mu)$ に対して, $fg \in L^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ であり,

$$\left| \int fg \, d\mu \right| \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

(2) 任意の $f, g \in L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ に対して,

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

<u>略証</u> (2) $p = 1$ の場合, $|f + g| \le |f| + |g|$ の両辺を積分することにより直ちに得られる.

$p = +\infty$ の場合は,

$$-\|f\|_\infty \le f \le \|f\|_\infty \ \mu\text{-a.e.}, \quad -\|g\|_\infty \le g \le \|g\|_\infty \ \mu\text{-a.e.}$$

であるから,

$$|f + g| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \ \mu\text{-a.e.}$$

なので,

$$\|f + g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

が得られる. （次のスライドに続く）

定理 9.1 $1 \le p \le +\infty$, $1 \le q \le +\infty$ とし, $1/p + 1/q = 1$ とする.

(1) 任意の $f \in L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ と $g \in L^q(X, \mathscr{F}, \mu)$ に対して, $fg \in L^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ であり,

$$\left| \int fg \, d\mu \right| \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

(2) 任意の $f, g \in L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ に対して,

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

略証の続き (2) 以下, $1 < p < +\infty$ とする. $f + g = 0$ μ-a.e. のときは, $\|f + g\|_p = 0$ なので, 明らかに成立する. そこで, 「$f + g = 0$ μ-a.e.」でないとする. このとき,

$$\int |f + g|^p \, d\mu = \int |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} \, d\mu \le \int |f| \cdot |f + g|^{p-1} \, d\mu + \int |g| \cdot |f + g|^{p-1} \, d\mu \qquad (*)$$

であり, ここで $q \triangleq p/(p-1)$ とおくと, $(1/p) + (1/q) = 1$ であり,

$$(|f + g|^{p-1})^q = (|f + g|^{p-1})^{p/(p-1)} = |f + g|^p$$

なので, 補題9.1より $|f + g|^{p-1}$ は q 乗可積分である.

補題 9.1 $1 \le p < +\infty$ のとき, $f, g \in L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ ならば, $f + g \in L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$.

略証 $|f + g|^p \le (|f| + |g|)^p \le (2 \max\{|f|, |g|\})^p = 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \le 2^p (|f|^p + |g|^p)$

と積分の単調性(定理7.1 (1))から明らか. (Q.E.D.)

<u>定理 9.1</u> $1 \le p \le +\infty$, $1 \le q \le +\infty$ とし, $1/p + 1/q = 1$ とする.

(1) 任意の $f \in L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ と $g \in L^q(X, \mathscr{F}, \mu)$ に対して, $fg \in L^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ であり,

$$\left|\int fg\, d\mu\right| \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

(2) 任意の $f, g \in L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ に対して,

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

<u>略証の続き</u> (2) 以下, $1 < p < +\infty$ とする. $f + g = 0$ μ-a.e. のときは, $\|f + g\|_p = 0$ なので, 明らかに成立する. そこで, 「$f + g = 0$ μ-a.e.」でないとする. このとき,

$$\int |f + g|^p\, d\mu = \int |f + g| \cdot |f + g|^{p-1}\, d\mu \le \int |f| \cdot |f + g|^{p-1}\, d\mu + \int |g| \cdot |f + g|^{p-1}\, d\mu \qquad (*)$$

であり, ここで $q \triangleq p/(p-1)$ とおくと, $(1/p) + (1/q) = 1$ であり,

$$(|f + g|^{p-1})^q = (|f + g|^{p-1})^{p/(p-1)} = |f + g|^p$$

なので, 補題9.1より $|f + g|^{p-1}$ は q 乗可積分である. よって $(*)$ の右辺の2つの項に(1)を適用して

$$\int |f + g|^p\, d\mu \le \left(\int |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f + g|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int |g|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f + g|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

（次のスライドに続く）

定理 9.1 $1 \le p \le +\infty$, $1 \le q \le +\infty$ とし, $1/p + 1/q = 1$ とする.

(1) 任意の $f \in L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ と $g \in L^q(X, \mathscr{F}, \mu)$ に対して, $fg \in L^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ であり,

$$\left|\int fg\, d\mu\right| \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

(2) 任意の $f, g \in L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ に対して,

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

略証の続き (2) $(*)$ の右辺の2つの項に(1)を適用して

$$\int |f+g|^p\, d\mu \le \left(\int |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int |g|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

「$f + g = 0$ μ-a.e.」でないと仮定しているので $\left(\int |f+g|^p\, d\mu\right)^{1/q} \ne 0$ だから,

上式両辺を $\left(\int |f+g|^p\, d\mu\right)^{1/q}$ で割ると,

$$\boxed{q \triangleq \frac{p}{p-1}}$$

$$\|f+g\|_p = \left(\int |f+g|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \int |f+g|^p\, d\mu \cdot \left(\int |f+g|^p\, d\mu\right)^{-\frac{p-1}{p}}$$

$$= \int |f+g|^p\, d\mu \cdot \left(\int |f+g|^p\, d\mu\right)^{-\frac{1}{q}} \le \left(\int |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p + \|g\|_p.$$

(Q.E.D.)

補題 9.2 ノルム空間 $(V, \|\cdot\|)$ の点列 $\{v_n\}$ が

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| < +\infty$$

を満たすならば ある $v \in V$ が存在して

$$\left\| v - \sum_{n=1}^{k} v_n \right\| \to 0 \quad (k \to \infty)$$

となることは，V が完備であるための必要十分条件である.

略証（必要性）V が完備であるとすると，$i \geq j$ のとき，

$$\left\| \sum_{n=1}^{i} v_n - \sum_{n=1}^{j} v_n \right\| \leq \sum_{n=j+1}^{i} \|v_n\| \to 0 \quad (i, j \to \infty)$$

なので，$\left\{ \sum_{n=1}^{k} v_n \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$ が Cauchy 列となることから従う.

（次のスライドに続く）

補題 9.2 ノルム空間$(V, \|\cdot\|)$の点列$\{v_n\}$が

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|v_n\| < +\infty$$

を満たすならば ある$v \in V$が存在して

$$\left\|v - \sum_{n=1}^{k} v_n\right\| \to 0 \quad (k \to \infty)$$

となることは，Vが完備であるための必要十分条件である.

略証の続き（十分性）$\{v_n\}$をCauchy列とするとき，部分列$\{v_{n_i}\}$を

$$\left\|v_{n_i} - v_{n_{i+1}}\right\| < \frac{1}{2^i} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

となるように取ることができる. このとき,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left\|v_{n_i} - v_{n_{i+1}}\right\| \le 1 < +\infty$$

であるから，仮定より，ある$v \in V$が存在して

$$\left\|v - v_{n_1} + v_{n_{k+1}}\right\| = \left\|v - \sum_{i=1}^{k}\left(v_{n_i} - v_{n_{i+1}}\right)\right\| \to 0 \quad (k \to \infty)$$

となるので,$\{v_{n_i}\}$は$v_{n_1} - v$に収束する. $\{v_n\}$はCauchy列なので,$\{v_n\}$も$v_{n_1} - v$に収束する.
(Q.E.D.)

<u>定理 9.2</u> $1 \leq p \leq +\infty$ とする. $L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上に2項関係 $\sim$ を

$$f \sim g \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} f = g \ \mu\text{-a.e.}$$

で定義すると, $\sim$ は同値関係であり, 商集合 $L^p(X, \mathscr{F}, \mu)/\sim$ 上に

$$\left\| [f] \right\|_p \triangleq \|f\|_p \quad \text{（ただし, } [f] \text{ は } f \in L^p(X, \mathscr{F}, \mu) \text{ の } \sim \text{ による同値類）}$$

によりノルムが定義され, $(L^p(X, \mathscr{F}, \mu)/\sim, \|\cdot\|_p)$ はBanach空間となる.
特に, $(L^2(X, \mathscr{F}, \mu)/\sim, \|\cdot\|_2)$ はHilbert空間であり, 内積は

$$\langle f, g \rangle \triangleq \int fg \, d\mu$$

で定義される.

定理 9.2 $1 \le p \le +\infty$ とする．$L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上に2項関係 $\sim$ を

$$f \sim g \overset{\Delta}{\iff} f = g \ \mu\text{-a.e.}$$

で定義すると，$\sim$ は同値関係であり，商集合 $L^p(X, \mathscr{F}, \mu)/\sim$ 上に

$$\left\| [f] \right\|_p \triangleq \|f\|_p \quad \text{（ただし，}[f]\text{は}f \in L^p(X, \mathscr{F}, \mu)\text{の}\sim\text{による同値類）}$$

によりノルムが定義され，$(L^p(X, \mathscr{F}, \mu)/\sim, \|\cdot\|_p)$ はBanach空間となる．

略証 完備性のみを示す．補題9.2より $\{f_n\} \subset L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ が $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < +\infty$ を満たすとき，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が μ-a.e.で存在して，$L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ に属することを示せばよい．
まず，$1 \le p < +\infty$ の場合を考える．単調収束定理から

$$\left(\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} |f_n| \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{k\to\infty} \left(\int \left(\sum_{n=1}^{k} |f_n| \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{k} |f_n| \right\|_p \le \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \|f_n\|_p < +\infty$$

であるので，$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < +\infty$ μ-a.e.である．したがって，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が μ-a.e.で存在し，

$$\int \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right|^p d\mu \le \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right)^p d\mu < +\infty$$

なので，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ である．（次のスライドに続く）

<u>定理 9.2</u> $1 \leq p \leq +\infty$ とする. $L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上に2項関係 $\sim$ を

$$f \sim g \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} f = g \ \mu\text{-a.e.}$$

で定義すると, $\sim$ は同値関係であり, 商集合 $L^p(X, \mathscr{F}, \mu)/\sim$ 上に

$$\left\| [f] \right\|_p \triangleq \|f\|_p \quad \text{（ただし, } [f] \text{ は } f \in L^p(X, \mathscr{F}, \mu) \text{ の } \sim \text{ による同値類）}$$

によりノルムが定義され, $(L^p(X, \mathscr{F}, \mu)/\sim, \|\cdot\|_p)$ はBanach空間となる.

<u>略証の続き</u> $p = +\infty$ の場合は,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty \ \mu\text{-a.e.}$$

から示される. (Q.E.D.)