代数学第一 第 6 回 （加藤・川内　2021 年 5 月 20 日）

要提出問題

問 6.1. K を体とする．次を示せ．

(1) $K[X,Y]$ の部分環 $K[X, XY, XY^2, \ldots, XY^n, \ldots]$ はネーター環ではない．
(2) $K[X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots]$ は一意分解整域であるがネーター環ではない．
(3) ネーター環であるが一意分解整域でない例をあげよ．

問 6.2. (A, M) を可換なネーター局所環とする．このとき $\bigcap_{n=1}^{\infty} M^n = \{0\}$ を示せ．

問 6.3. 整域なアルティン環は体であることを示せ．

補足問題

問 6.4. A を単項イデアル整域とし，$0 \neq a \in A$ とする．このとき $A/(a)$ はアルティン環であることを示せ．(ヒント：$A/(a)$ のイデアル I に対して自然な全射 $\pi\colon A \to A/(a)$ による逆像 $\pi^{-1}(I)$ を考える)

問 6.5. A を可換環，M を有限生成 A-加群とする．I を A のイデアルとし $IM = M$ が成り立つならば $A = I + \mathrm{Ann}(M)$ であることを示せ．