代数学第一 第 4 回 （加藤・川内　2021 年 5 月 6 日）

要提出問題

問 4.1. $A = \mathbb{Z}/6Z$ とする．$\overline{2} = 2 + 6\mathbb{Z}$ で表し，$S = \left\{\overline{2}^n \mid 0 \leq n \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ とおく．$S^{-1}A$ の完全代表系を 1 組求めよ．

問 4.2. $A = \mathbb{Q}[X]/(X^2)$ とする．全商環 $Q(A)$ はどのような環となるか？ (よく知られた環やその剰余環，あるいはそれらの直積環で表すこと)

問 4.3. $p, q \in \mathbb{Z}$ を素数とし，$p \neq q$ とする．$M = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}$-加群とみる．

(1) $\mathbb{Z}$-加群として $M_{(p)} \cong M$ を示せ．
(2) $M_{(q)}$ はどうなるか．

問 4.4. A を可換環とし，S を A の積閉集合とする．次を示せ．

(1) $\varphi\colon A \to S^{-1}A$ を $\varphi(a) = a/1$ で定める．S が A の零因子を持たないなら φ は単射である．
(2) $S^{-1}A$ のイデアルは，A のイデアル I で $\varphi(I)(S^{-1}A)$ と表される．これを単に $I(S^{-1}A)$ で表す．
(3) $S^{-1}A$ の素イデアルは，S と交わらない A の素イデアル P で $P(S^{-1}A)$ と表される．

補足問題

問 4.5. $A \neq 0$ を可換環，S を A の非零因子全体とする．次を示せ．

(1) S は A の乗法的閉集合である．
(2) $S^{-1}A$ の元は零因子か単元である．
(3) A の非単元は零因子であるとすると $Q(A) \cong A$ である．

問 4.6. A を可換環とし，S を A の積閉集合とする．A が単項イデアル整域ならば $S^{-1}A$ も単項イデアル整域であることを示せ．

問 4.7. A を整域とし，S を A の積閉集合とする．次を示せ．

(1) $a \in A$ が素元なら $a/1 \in S^{-1}A$ は素元または単元である．
(2) A が一意分解整域ならば $S^{-1}A$ も一意分解整域である．