代数学第一 第 1 回 （加藤・川内　2021 年 4 月 15 日）

「環」は単位元を持つとする．

要提出問題

問 1.1. R を可換環とする．S, T を R の空でない部分集合とし，$I = (S)$ を S で生成される R のイデアル，$J = (T)$ を T で生成される R のイデアルとする．イデアルの演算に関して次が成り立つなら証明し，成り立たないならば反例をあげよ．

(1) $I + J = (\{s + t \mid s \in S, t \in T\})$.
(2) $I + J = (S \cup T)$.
(3) $IJ = \{ab \mid a \in I, b \in J\}$.
(4) $IJ = (\{st \mid s \in S, t \in T\})$.

問 1.2. $n \geq 2$ を整数とする．

(1) n 次複素行列環 $M_n(\mathbb{C})$ の左零因子は右零因子であることを示せ．
(2) n 次複素行列環 $M_n(\mathbb{C})$ において非可逆元は (左かつ右) 零因子であることを示せ．

問 1.3. R を環とし，$a \in R$ はべき零元とする．

(1) $1 + a$ は R の単元であることを示せ．
(2) R の単元とべき零元の和は R の単元であるか？

問 1.4. $R = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right] = \left\{m + n\sqrt{-3} \mid m, n \in \mathbb{Z}\right\}$ は複素数としての和と積で可換環をなす．次が正しいかどうか調べよ．

(1) $2 \in R$ は素元である．
(2) $2 \in R$ は既約元である．
(3) R の可逆元は ± 1 に限る．
(4) $R \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 3)$.

補足問題

問 1.5. K を体とし，$K[X]$ を K 上の多項式環とする．次を示せ．

(1) $K[X]$ の (0) でない素イデアルは極大イデアルである．
(2) $K[X]$ の既約元 $f(X)$ に対して，剰余環 $K[X]/(f(X))$ は体である．

問 1.6. $D \neq 0, 1$ を平方因子を持たない整数とする．$\mathbb{Z}\left[\sqrt{D}\right]/(2)$ は全て同型であることを示せ．またこれはどのような環か？