集合と位相第二

第9回　分離公理と連続写像

2.4.4　分離公理と連続関数

2.4.2 項で，距離空間は正規であることを証明した（定理 2.12）．証明は定理 2.13 に述べられた事実に基づくものであった．つぎの定理は，一般に正規空間（T_4 空間でよい）がやや弱いが類似の性質を満たすことを示すものである．二つの定理の条件を比較してほしい．

Urysohn

定理 2.16　ウリゾーンの補題　X を正規空間（T_4 空間を仮定すれば充分），$F_1, F_2 \subset X$ を二つの閉集合で $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ となるものとする．このとき，X 上の実数値連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ で

1）任意の $x \in X$ に対して $0 \leq f(x) \leq 1$

2）F_1 上の任意の点 x で $f(x) = 0$

3）F_2 上の任意の点 x で $f(x) = 1$

となるものが存在する．

p. 101

定理 2.13　X を距離空間とし，$F_1, F_2 \subset X$ を二つの互いに交わらない閉集合とする．このとき，X 上の実数値連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ で

空でない

テキストの証明が
適用できるのは
この場合

1）任意の $x \in X$ に対して $0 \leq f(x) \leq 1$

2）$F_1 = \{x \in X; f(x) = 0\}$

3）$F_2 = \{x \in X; f(x) = 1\}$

となるものが存在する．

$F_1 = \varnothing$ または $F_2 = \varnothing$ のときは，
テキストとは別の証明が
適用できる．

p. 104

定理 2.16　ウリゾーンの補題　X を正規空間（T_4 空間を仮定すれば充分），$F_1, F_2 \subset X$ を二つの閉集合で $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ となるものとする．このとき，X 上の実数値連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ で

1）任意の $x \in X$ に対して $0 \leq f(x) \leq 1$

2）F_1 上の任意の点 x で $f(x) = 0$

3）F_2 上の任意の点 x で $f(x) = 1$

となるものが存在する．

注: 1), 2), 3) を満たす連続関数 f が存在する $\Leftrightarrow$ T_4 空間

($\Rightarrow$) の証明: 定理2.12 の証明の最後の部分 (p. 101) と同様

p. 104

定理 2.16 ウリゾーンの補題 X を正規空間 (T_4 空間を仮定すれば充分), $F_1, F_2 \subset X$ を二つの閉集合で $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ となるものとする. このとき, X 上の実数値連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ で

1) 任意の $x \in X$ に対して $0 \leq f(x) \leq 1$

2) F_1 上の任意の点 x で $f(x) = 0$

3) F_2 上の任意の点 x で $f(x) = 1$

となるものが存在する.

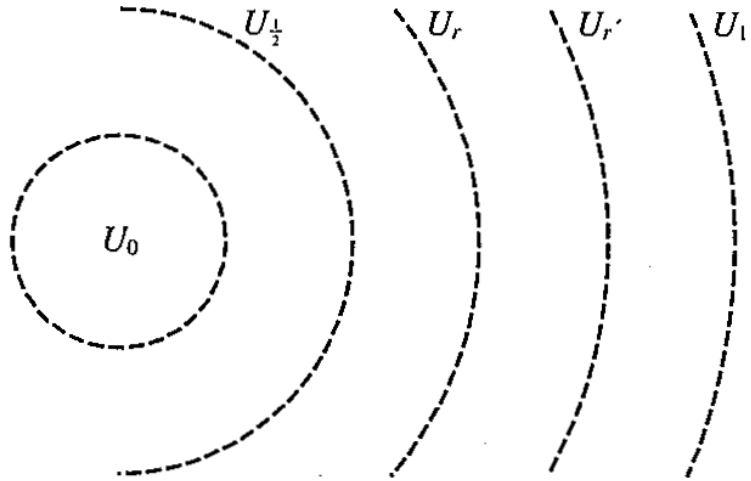

図 2.10

(可算)選択公理

$$\overline{U_0} \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U_{\frac{3}{4}}} \subset U_1$$

となるような開集合 $U_{\frac{1}{4}}, U_{\frac{3}{4}}$ がとれる．以下，この操作を順次続けていく．より具体的には，m に関する帰納法により $r = \frac{n}{2^m}$ $(0 \leq n \leq 2^m)$ の形の有理数に対して開集合 U_r をとり，$r < r'$ ならば常に

$$U_r \subset \overline{U_r} \subset U_{r'}$$

となるようにするのである（図 2.10 参照）．

<u>補題11/4</u> X, Y を位相空間, $f : X \to Y, x \in X$ とし,
$\mathcal{U}(f(x))$ を $f(x)$ の基本近傍系とするとき,
f が x において連続 $\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(f(x)); f^{-1}(U)$ が x の近傍

$$\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(f(x)), \exists V : x \text{ の近傍 s.t. } f(V) \subset U.$$

<u>証明</u> （前半の $\Rightarrow$ ）点における写像の連続性の定義（定義2.24, p. 85）より明らか.
（前半の $\Leftarrow$ ）W を $f(x)$ の任意の近傍とすると, ある $U \in \mathcal{U}(f(x))$ が存在して $U \subset W$.
このとき, $f^{-1}(U)$ は x の近傍だから, $f^{-1}(U) \subset f^{-1}(W)$ も x の近傍である. よって,
f は x において連続.
（後半）$U \in \mathcal{U}(f(x))$ を任意に固定したとき,
$f^{-1}(U)$ が x の近傍 $\Leftrightarrow \exists V : x$ の近傍 s.t. $V \subset f^{-1}(U) \overset{*}{\Leftrightarrow} \exists V : x$ の近傍 s.t. $f(V) \subset U$.
(Q.E.D.)

$$\left(\begin{array}{l} * \; V \subset f^{-1}(U) \Leftrightarrow f(V) \subset U \text{ の証明:} \\ (\Rightarrow)\; y \in f(V) \Leftrightarrow \exists x \in V \text{ s.t. } y = f(x) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(U) \text{ s.t. } y = f(x) \Rightarrow y \in U. \\ (\Leftarrow)\; x \in V \Rightarrow f(x) \in f(V) \subset U \Rightarrow x \in f^{-1}(U). \end{array}\right)$$

たがって

$$y \in X - \overline{U_{1-r}} \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| \leq r < \varepsilon \tag{2.7}$$

となる．最後に $0 < f(x) < 1$ とする．この場合は $f(x) - \varepsilon < r = \frac{n}{2^m} < f(x) < r' = \frac{n'}{2^{m'}} < f(x) + \varepsilon$ となる r, r' をとれば $x \in U_{r'} - \overline{U_r}$（開集合）かつ $U_{r'} - \overline{U_r} \ni y \Rightarrow r \leq f(y) \leq r'$ となる．したがって

$$y \in U_{r'} - \overline{U_r} \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{2.8}$$

となる．(2.6),(2.7),(2.8) から f は確かに各点 x で連続となる． □

補題11/4と, $\mathbb{R}$ において $U(f(x), \varepsilon)$ が $f(x)$ の基本近傍系であることから従う.

定義 2.34　X を位相空間とする．X が T_1 空間であり，かつ任意の点 $x \in X$ とその点を含まない閉集合 $F \subset X$ に対して，ある実数値連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ で $f(x) = 0, y \in F \Rightarrow f(y) = 1, \mathrm{Im} f = [0, 1]$ となるものが存在するとき，X は**完全正則**（completely regular）という．

定義から明らかに

$$\text{正規} \implies \text{完全正則} \implies \text{正則}$$

である

1点集合が閉集合であることとUrysohnの補題から明らか.

定義 2.34　X を位相空間とする．X が T_1 空間であり，かつ任意の点 $x \in X$ とその点を含まない閉集合 $F \subset X$ に対して，ある実数値連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ で $f(x) = 0, y \in F \Rightarrow f(y) = 1, \mathrm{Im} f = [0, 1]$ となるものが存在するとき，X は**完全正則**（completely regular）という．

定義から明らかに

$$\text{正規} \implies \text{完全正則} \implies \text{正則}$$

である

定理2.12 の証明の最後の部分 (p. 101) と同様.

つぎの定理は，連続関数の拡張（1.2 節参照）に関する基本的な結果である．

Tietze's Extension Theorem

定理 2.17 ティーツェの拡張定理 X を正規空間（T_4 空間で充分である）とする．$A \subset X$ を閉集合 $f : A \to [a, b] \subset \mathbb{R}$ を任意の連続関数とする．このとき，連続関数 $\tilde{f} : X \to [a, b] \subset \mathbb{R}$ で f の拡張となるもの（すなわち $\tilde{f}|_A = f$ となるもの）が存在する．

定理 2.17　ティーツェの拡張定理　X を正規空間（T_4 空間で充分である）とする．$A \subset X$ を閉集合 $f : A \to [a, b] \subset \mathbb{R}$ を任意の連続関数とする．このとき，連続関数 $\tilde{f} : X \to [a, b] \subset \mathbb{R}$ で f の拡張となるもの（すなわち $\tilde{f}|_A = f$ となるもの）が存在する．

証明　まず $\mathbb{R}$ の平行移動と 0 でない実数による実数倍の写像（これらは $\mathbb{R}$ の同相写像である）を合成して考えることにより，f の値域が $[-1, 1]$ の場合を証明すれば充分である．

まず，$a = b$ の場合，f は定値関数ゆえ，定値のまま拡張すればよい．
i.e., $f(x) \equiv a$ のときは，$\tilde{f}(x) \equiv a$ とする．
そこで，以下 $a < b$ とする．

f の値域が $[-1,1]$ の場合を証明すれば充分である.

連続関数 $f : A \to [a,b]$ に対し, $g(x) \triangleq (2x-a-b)/(b-a)$ と定めれば,
g は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への同相写像であって, $g([a,b]) = [-1,1]$ である.
連続関数 $h \triangleq g \circ f : A \to [-1,1]$ に対して,
終域が $[-1,1]$ の場合の Tietzeの拡張定理を適用し,
h の連続な拡張 $\tilde{h} : X \to [-1,1]$ を得たならば,
$\tilde{f} \triangleq g^{-1} \circ \tilde{h} : X \to [a,b]$ は f の連続な拡張である.

$\left(\because\right.$ 連続性は, 連続写像の合成が連続であること(定理2.11, p. 85)から明らか.
拡張であることは, $x \in A$ について

$$\tilde{f}(x) = g^{-1}(\tilde{h}(x)) = g^{-1}(h(x)) = g^{-1}(g(f(x))) = f(x)$$

$\left.\text{であることから分かる.}\right)$

また，任意の $\varepsilon > 0$ に対しある N が存在して，任意の $x \in X$ に対し

$$\left| \sum_{n \geq N} s_n(x) \right| \leq \varepsilon$$

となる．

$$\because \quad \left| \sum_{n \geq N} s_n(x) \right| \leq \sum_{n \geq N} \left| s_n(x) \right| \leq \frac{1}{3} \sum_{n \geq N} \left(\frac{2}{3} \right)^n \leq \varepsilon$$

各 s_n は連続関数であることと，上記のことから $\tilde{f}$ が連続関数となることがわかる．

任意に $\varepsilon>0$ と $x \in X$ を固定する．

先に示したことより，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $y \in X$ に対し

$$\left|\sum_{n \geq N} s_n(y)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

とできる．$n = 0,1,\ldots,N-1$ について s_n は連続なので，

補題11/4 より各 n について x の近傍 V_n が存在して，

$$y \in V_n \Rightarrow \left|s_n(x) - s_n(y)\right| < \frac{\varepsilon}{3N}$$

とできる．このとき，$V \triangleq \bigcap_{n=0}^{N-1} V_n$ も x の近傍であり，$\forall y \in V$ について

$$\begin{aligned}\left|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\right| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} s_n(y)\right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1}\left|s_n(x) - s_n(y)\right| + \left|\sum_{n \geq N} s_n(x)\right| + \left|\sum_{n \geq N} s_n(y)\right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1}\frac{\varepsilon}{3N} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

したがって，補題11 / 4より $\tilde{f}$ は連続となる．

定義 2.35　X を位相空間とする．X 上にある距離が存在し，それの定める位相がもとの位相と一致するとき X は距離付け可能（metrizable）であるという．

<u>例</u>　離散位相空間は距離付け可能である.

$\because$ 離散距離

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & (x=y \text{ のとき})\\ 1 & (x\neq y \text{ のとき})\end{cases}$$

の定める位相は離散位相である.

X が距離空間ならばその任意の部分集合 $A \subset X$ も距離空間であり，その定める位相は明らかに相対位相と同じである．

(X, d) を距離空間とすれば，任意の部分集合 $A \subset X$ に対し $(A, d|_{A\times A})$ は明らかに距離空間となる．これを部分距離空間という．このとき，$(A, d|_{A\times A})$ の定める A 上の位相は相対位相と一致することが簡単にわかる．

$\because$ (X, d) を距離空間，$A \subset X$ とする．
d の $A \times A$ への制限 $d\restriction_{A\times A} \colon A \times A \to \mathbb{R}$ が
A 上の距離の条件を満たすことは，
d が距離であることから明らかである．
よって，$(A, d\restriction_{A\times A})$ は距離空間である．

<u>補題</u> (X, d) を距離空間とする.

1) 開球体 $U(x, \varepsilon) \triangleq \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ は開集合である.
2) 開球体 $U(x, \varepsilon)$ の全体は開基をなす.

<u>証明</u> 1) 任意の $y \in U(x, \varepsilon)$ に対し, $\delta \triangleq \varepsilon - d(x, y) > 0$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
z \in U(y, \delta) &\Leftrightarrow d(y, z) < \delta \\
&\Leftrightarrow d(y, z) < \varepsilon - d(x, y) \\
&\Leftrightarrow d(x, y) + d(y, z) < \varepsilon \\
&\Rightarrow d(x, z) < \varepsilon \qquad (\because \text{三角不等式})
\end{aligned}
$$

より $U(y, \delta) \subset U(x, \varepsilon)$ となるので, $U(x, \varepsilon)$ は開集合である.

2) 距離空間における開集合の定義(教科書 p. 72)と
開基であるための必要十分条件(教科書 p. 77)から明らか.
(Q.E.D.)

X が距離空間ならばその任意の部分集合 $A \subset X$ も距離空間であり，その定める位相は明らかに相対位相と同じである．

(X, d) を距離空間とすれば，任意の部分集合 $A \subset X$ に対し $(A, d|_{A\times A})$ は明らかに距離空間となる．これを**部分距離空間**という．このとき，$(A, d|_{A\times A})$ の定める A 上の位相は相対位相と一致することが簡単にわかる．

<u>証明</u> (X, d) を距離空間，$A \subset X$ とする．
$x \in A$ を中心とする半径 $\varepsilon > 0$ の，距離空間 $(A, d\restriction_{A\times A})$ における開球体 $U_A(x, \varepsilon) \triangleq \{y \in A \mid d\restriction_{A\times A}(x, y) < \varepsilon\}$ は，
(X, d) における開球体 $U(x, \varepsilon) \triangleq \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ と
A の共通集合に等しい，つまり，

$$U_A(x, \varepsilon) = \{y \in A \mid d\restriction_{A\times A}(x, y) < \varepsilon\} = \{y \in A \mid d(x, y) < \varepsilon\} = U(x, \varepsilon) \cap A.$$

（次のスライドに続く）

直前の補題 2) から,
開球体 $U_A(x,\varepsilon)$ の全体は $(A, d\restriction_{A\times A})$ の距離位相の開基だから,
距離空間 $(A, d\restriction_{A\times A})$ における任意の開集合 V に対して,
開球体の族 $\{U_A(x_\lambda,\varepsilon_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して, $V=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_A(x_\lambda,\varepsilon_\lambda)$ とできる.
このとき,

$$V=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_A(x_\lambda,\varepsilon_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U(x_\lambda,\varepsilon_\lambda)\cap A)=\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U(x_\lambda,\varepsilon_\lambda)\right)\cap A$$

であって, 直前の補題 1) から $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U(x_\lambda,\varepsilon_\lambda)$ は X の開集合だから,
V は A の相対位相に関する開集合となる.

一方, V を A の相対位相に関する任意の開集合とすると,
X の ある開集合 U が存在して $V=U\cap A$ となる.
$x\in V$ とすると, $x\in U$ であって, U は X の開集合だから,
ある $\varepsilon>0$ が存在して $U(x,\varepsilon)\subset U$ となる. このとき,

$$U_A(x,\varepsilon)=U(x,\varepsilon)\cap A\subset U\cap A=V$$

なので, V は距離空間 $(A, d\restriction_{A\times A})$ における開集合でもある. (Q.E.D.)

さて関数

$$d' : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

を

$$d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

により定義すれば，これは明らかに連続となる．さらに d' は X 上の距離関数となり，しかもその定める位相はもとの距離 d の定める位相と一致する

1) d' の定義から明らかに，$d'(x, y) \geq 0$ であり，

$$d'(x, y) = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

2) $d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\} = \min\{1, d(y, x)\} = d'(y, x).$

3)
$$\begin{aligned} d'(x, y) + d'(y, z) &= \min\{1, d(x, y)\} + \min\{1, d(y, z)\} \\ &= \min\{2, 1 + d(y, z), d(x, y) + 1, d(x, y) + d(y, z)\} \\ &\geq \min\{1, d(x, z)\} = d'(x, z). \end{aligned}$$

さて関数

$$d' : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

を

$$d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

により定義すれば，これは明らかに連続となる．さらに d' は X 上の距離関数となり，しかもその定める位相はもとの距離 d の定める位相と一致する

任意の距離空間 X において，
$x \in X$ を中心とする半径1以下の開球体全体からなる族は
x の基本近傍系になる（ほとんど明らか．各自 確かめよ）．
また，半径が1以下のとき，
d に関する開球体とd' に関する開球体は一致する．
以上の事実と命題2.5の後半（p. 81）から従う．

以上のことを各 X_n に適用すれば，定理を証明するためにはすべての n に対して

$$\operatorname{diam} X_n \leq 1$$

と仮定してよいことがわかる．さて直積 $\Pi_n X_n$ を X と書き，X_n 上の上記の仮定を満たす距離を d_n とする．関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ を $x = (x_n), y = (y_n) \in X$ に対し

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n)$$

とおくことにより定義する（仮定 $\operatorname{diam} X_n \leq 1$ から右辺は収束する）．明らかに d は連続となるが，さらに X 上の距離関数となることがわかる．

容易なので，各自 確かめよ

pp. 110-111

そこでこの距離 d の定める位相が X の直積位相と一致することを示せば証明が終わることになる．

まず，X の距離位相に関する開集合が直積位相についても開集合であることを示す．そのためには，任意の点 $x = (x_n) \in X$ と任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し

$$x \in U \subset U(x, \varepsilon) = \{y \in X; d(x, y) < \varepsilon\} \tag{2.10}$$

となるような直積位相に関する開集合 U が存在することを示せばよい．

$x \in X$ の直積位相に関する開近傍 U の全体：x の直積位相に関する基本近傍系

$x \in X$ を中心とする開球体 $U(x, \varepsilon)$ の全体：x の距離位相に関する基本近傍系

命題 2.2.2.D $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$: 集合 X 上の開集合系，$\mathcal{U}(x)$: $x \in X$ の $\mathcal{U}$ に関する基本近傍系，$\mathcal{V}(x)$: $x \in X$ の $\mathcal{V}$ に関する基本近傍系とするとき $\forall x \in X$, $\forall U \in \mathcal{U}(x)$, $\exists V \in \mathcal{V}(x)$ s.t. $V \subset U$ であれば，$\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$.

つぎに，直積位相に関する開集合が距離位相でも開集合であることを示す．そのためには，任意の点 $x = (x_n) \in X$ と

$$x \in U = U_{i_1}(x_{i_1}, \varepsilon_{i_1}) \times \cdots \times U_{i_k}(x_{i_k}, \varepsilon_{i_k}) \times \Pi_{n \neq i_1, \cdots, i_k} X_n$$

の形をした直積位相に関する x の開近傍 U に対し

$$x \in U(x, \delta) \subset U \tag{2.11}$$

となるような $\delta > 0$ が存在することを示せばよい．

$x \in X$ の上の形をした直積位相に関する開近傍 U の全体 : x の直積位相に関する基本近傍系

$x \in X$ を中心とする開球体 $U(x, \delta)$ の全体 : x の距離位相に関する基本近傍系

命題 2.2.2.D $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$: 集合 X 上の開集合系，$\mathcal{U}(x)$: $x \in X$ の $\mathcal{U}$ に関する基本近傍系，$\mathcal{V}(x)$: $x \in X$ の $\mathcal{V}$ に関する基本近傍系とするとき $\forall x \in X$, $\forall U \in \mathcal{U}(x)$, $\exists V \in \mathcal{V}(x)$ s.t. $V \subset U$ であれば，$\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$.

<u>補題</u> $\mathcal{O}$ を高々可算個の元からなる位相空間 X の開基とする.
このとき, $\bar{U} \subset V$ なる $U, V \in \mathcal{O}$ が存在する.
特に, 任意の $x \in X$ と x の任意の開近傍 W に対して,

$$x \in U \subset \bar{U} \subset V \subset \bar{V} \subset W$$

なる $U, V \in \mathcal{O}$ が存在する.

<u>証明</u> X は T_3 空間でもあるので, 命題2.11 1) (p. 98-99) より
$x \in V_0 \subset \overline{V_0} \subset W$ なる開集合 V_0 が存在する.
$\mathcal{O}$ は開基なので, $x \in V \subset V_0$ なる $V \in \mathcal{O}$ がある.
再び T_3 空間の性質より $x \in U_0 \subset \overline{U_0} \subset V$ なる開集合 U_0 が存在し,
$x \in U \subset U_0$ なる $U \in \mathcal{O}$ がある. このとき,

$$x \in U \subset \bar{U} \subset \overline{U_0} \subset V \subset \bar{V} \subset \overline{V_0} \subset W$$ となっている.

定理2.19 Urysohnの距離付け定理の証明の補足

- 写像$F : X \to I^{\mathbb{N}}$ の連続性: 第6回「直積位相」最後のスライドより直ちに従う.

- F の単射性: $x \neq y$ なる $x, y \in X$ に対し, 先の補題で $W \triangleq X \setminus \{y\}$ とすれば, $x \in U$ より $f_{(U,V)}(x) = 0$, $y \in X \setminus V$ より $f_{(U,V)}(y) = 1$ なので, $F(x) \neq F(y)$ となる.

- 「$W \subset X$ を任意の空でない開集合とし, $x \in W$ とする (p. 113)」:
  上の赤字部分では, ($F(W)$ が開集合であることを示すために)
  $F(W)$ の要素 $F(x)$ を任意に取ってきていることと同じであることに注意.

- $O_j = I^{\mathbb{N}}$ の元で j 成分が 1 未満となるものの全体 (p. 113)

$$= \{(r_i) \in I^{\mathbb{N}} \mid r_j < 1\}$$

$$= \overbrace{I \times \cdots \times I}^{j-1\text{個}} \times [0,1[\times I \times I \times \cdots$$

(ここで, $[0,1[= \{r \mid 0 \leq r < 1\}$ は I の開集合であることに注意)

<u>命題</u>

0) T_0 空間の部分空間は T_0 空間である.

1) T_1 空間の部分空間は T_1 空間である.

2) Hausdorff 空間の部分空間は Hausdorff 空間である.

<u>証明</u> いずれも定義から明らか.

<u>命題</u> 正則空間の部分空間は正則である.

(教科書の証明の最後の2文の説明)

A における V' の閉包を F とすれば,

$\overline{V'} \cap A$ ($\overline{V'}$ は X における $V' = V \cap A$ の閉包)が

V' を含む, A における閉集合であり,

F は V' を含む, A における最小の閉集合なので,

$F \subset \overline{V'} \cap A$ だから

$$a \in V' \subset F \subset \overline{V'} \cap A \subset \overline{V'} = \overline{V \cap A} \subset \bar{V} \subset \bar{U}$$

となる. したがって, $a \in V' \subset F \subset \bar{U} \cap A = U$ となり,

命題 2.11 1) (pp. 98–99) から A は T_3 空間となる.

<u>命題</u> 正規空間の任意の閉部分空間は正規である.

<u>証明</u> T_1 空間の部分空間が T_1 空間であることと,
次の命題から示される. (Q.E.D.)

<u>命題</u> T_4 空間の任意の閉部分空間は T_4 空間である.

<u>注</u> 一般に, 正規空間の部分空間は正規とは限らない.

<u>命題</u> T_4 空間の任意の閉部分空間は T_4 空間である.

<u>証明</u> X を T_4 空間, F を X の閉集合とする.
F_1 を X の部分空間 F の任意の閉部分集合とすると,
X の閉集合 $\tilde{F}_1$ が存在して $F_1 = F \cap \tilde{F}_1$ となるが,
F は X の閉集合なので F_1 も X の閉集合である.

F_1, F_2 を部分空間 F の閉部分集合で $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ なるものとする.
上で確認したことから F_1 と F_2 は X の閉集合であり,
X は T_4 空間だから, X の開集合 U, V で,
$F_1 \subset U, F_2 \subset V, U \cap V = \varnothing$ となるものが存在する.
このとき, $F_1 \subset U \cap F, F_2 \subset V \cap F, (U \cap F) \cap (V \cap F) = \varnothing$ であり,
$U \cap F$ と $V \cap F$ は部分空間 F の開集合である.
以上から, F は T_4 空間である. (Q.E.D.)

<u>補題</u> X と Y を位相空間, $\mathcal{V}$ を X の開基,
$f : X \to Y$ とするとき,

$$f \text{ が開写像} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V};\ f(V) \text{ が } Y \text{ の開集合}.$$

<u>証明</u> $(\Rightarrow)$ 明らか.
$(\Leftarrow)$ U を X の開集合とすると,
$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ となる $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{V}$ が存在する.
よって, $f(U) = f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(V_\lambda)$ より,
$f(U)$ は Y の開集合である. (Q.E.D.)

<u>命題</u> $\{X_\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ を空でない位相空間の族, $X \triangleq \prod_{\mu\in\Lambda} X_\mu$ を その直積空間とする.
$\lambda \in \Lambda$ とし, すべての $\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$ に対して $x_\mu \in X_\mu$ とするとき,
X の部分空間

$$Y \triangleq X_\lambda \times \{(x_\mu)_{\mu\neq\lambda}\} = \{(y_\lambda) \mid \forall\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\};\ y_\mu = x_\mu\} \subset X$$

は X_λ と同相である.

<u>証明</u> 写像 $f : Y \to X_\lambda$ を射影 $p_\lambda : X \to X_\lambda$ の Y への制限とする,
i.e., $f = p_\lambda|_Y$. 明らかに f は全単射であり, p_λ が連続であることから f も連続である
(連続写像の部分空間への制限が連続であることは容易に示せる).
直前の補題より, f が開写像であることを示すには,
Y の開基の任意の元の像が開集合であることを示せばよい.
X の開基の元 $\prod_{\mu\in\Lambda} U_\mu$ (ただし, すべての $\mu \in \Lambda$ について U_μ は X_μ の開集合であり,
かつ有限個の μ を除いて $U_\mu = X_\mu$)と Y との共通集合の全体が Y の開基をなし,
その任意の元は $U_\lambda \times \{(x_\mu)_{\mu\neq\lambda}\}$ と表わせる. このとき, f による その像は U_λ となる.
よって f は開写像である. 以上から, f は同相写像である. (Q.E.D.)

<u>命題</u> $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を空でない位相空間の族,
$X \triangleq \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を その直積空間とする.

1) X が Hausdorff 空間 $\Rightarrow \forall\lambda \in \Lambda;\ X_\lambda$ は Hausdorff 空間
2) X が正則空間 $\Rightarrow \forall\lambda \in \Lambda;\ X_\lambda$ は正則空間

<u>証明</u> 1) 直前の命題から
各 X_λ は X の部分空間と同相であることに注意すると,
以前に示した命題から
Hausdorff 空間の部分空間が Hausdorff 空間であることと,
Hausdorff 空間と同相な位相空間は
Hausdorff 空間であることから従う.

2) 1) と同様. (Q.E.D.)

<u>補題</u> $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を空でない位相空間の族，$X \triangleq \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を その直積空間とする．
Λ_0 を Λ の有限部分集合，各 $\lambda_i \in \Lambda_0$ について $V_i \subset X_{\lambda_i}$ とし，
$V \triangleq \prod_{\lambda_i\in\Lambda_0} V_i \times \prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda_0} X_\lambda$ とするとき，

$$\overline{V} = \prod_{\lambda_i\in\Lambda_0} \overline{V}_i \times \prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda_0} X_\lambda$$

<u>証明</u> $x = (x_\lambda) \in X$ に対して

$$\mathcal{U}(x) \triangleq \left\{ \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \;\middle|\; \forall\lambda \in \Lambda;\ U_\lambda \text{ は } x_\lambda \in X_\lambda \text{ の開近傍，有限個の } \lambda \in \Lambda \text{ を除いて } U_\lambda = X_\lambda \right\}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
x = (x_\lambda) \in \overline{V} &\Leftrightarrow \forall \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{U}(x);\ \varnothing \neq V \cap \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \prod_{\lambda_i\in\Lambda_0} (V_i \cap U_{\lambda_i}) \times \prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda_0} U_\lambda \\
&\Leftrightarrow \forall \{U_{\lambda_i}\}_{\lambda_i\in\Lambda_0} (\text{各 } U_{\lambda_i} \text{ は } x_{\lambda_i} \in X_{\lambda_i} \text{ の開近傍});\ V_i \cap U_{\lambda_i} \neq \varnothing \\
&\Leftrightarrow \forall \lambda_i \in \Lambda_0;\ x_{\lambda_i} \in \overline{V}_i \\
&\Leftrightarrow x = (x_\lambda) \in \prod_{\lambda_i\in\Lambda_0} \overline{V}_i \times \prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda_0} X_\lambda
\end{aligned}$$

(Q.E.D.)

<u>命題</u> $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を空でない位相空間の族，$X \triangleq \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を その直積空間とする.

1) 各 X_λ が Hausdorff空間ならば，X も Hausdorff空間である.
2) 各 X_λ が T_3 空間ならば，X も T_3 空間である.
3) 各 X_λ が正則空間ならば，X も正則空間である.

<u>証明</u> 1) 第7回「Hausdorff空間」の授業で示した.

2) $x = (x_\lambda) \in X = \prod_\lambda X_\lambda$ を任意の点，U を x の X における開近傍とする.
このとき，直積位相の開基の定義から，有限個の λ_i と X_{λ_i} の開集合 U_i が存在して

$$x \in \prod_i U_i \times \prod_{\lambda\neq\lambda_i} X_\lambda \subset U$$

とできる. ここで，X_{λ_i} が T_3 空間であることと，命題 2.11 1) から，
X_{λ_i} の開集合 V_i で $x_{\lambda_i} \in V_i \subset \overline{V}_i \subset U_i$ となるものが存在する. そこで，

$$V \triangleq \prod_i V_i \times \prod_{\lambda\neq\lambda_i} X_\lambda$$

とおけば，直前の補題から $\overline{V} = \prod_i \overline{V}_i \times \prod_{\lambda\neq\lambda_i} X_\lambda$ なので，

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U$$

が導かれ，命題 2.11 1) から X は T_3 空間である.

3) 正則空間は Hausdorff空間かつ T_3 空間なので, 1) と 2) から明らか. (Q.E.D.)

<u>注</u> 正規空間の族の直積空間は必ずしも正規空間ではない.

今日の授業(p. 109)で示した

距離空間については，距離空間の任意の部分空間は明らかに距離空間であり，また高々可算個の距離空間の直積が距離付け可能となることは定理 2.18 で証明されている．

例 2.14　xy 平面 $\mathbb{R}^2$ の部分空間　　pp. 115–116

$$X = \{(x,1); x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,-1); x \in \mathbb{R}\}$$

は明らかにハウスドルフ空間である（図 2.11 参照）.

しかし，この空間に同値関係 $\sim$ を $(x,1) \sim (x,-1)$ $(x<0)$ により定義すれば，商空間 $X/\sim$ はハウスドルフ空間とならないことがわかる．2 点 $(0,1), (0,-1)$ の像が開集合により分離されないからである．

$$(x,y) \sim (x',y') \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} x = x' \text{ かつ } \left[y = y' \text{ または } x < 0 \right]$$

例 2.14　xy 平面 $\mathbb{R}^2$ の部分空間　　pp. 115–116

$$X = \{(x,1); x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,-1); x \in \mathbb{R}\}$$

は明らかにハウスドルフ空間である（図 2.11 参照）.

しかし，この空間に同値関係 $\sim$ を $(x,1) \sim (x,-1)$ $(x<0)$ により定義すれば，商空間 $X/\sim$ はハウスドルフ空間とならないことがわかる．2 点 $(0,1),(0,-1)$ の像が開集合により分離されないからである．

$\because$ $\pi : X \to X/\sim$ を標準的射影とし，U を $[(0,1)] \in X/\sim$ の開近傍，
V を $[(0,-1)] \in X/\sim$ の開近傍とする.
このとき，$\pi^{-1}(U)$ は $(0,1) \in X$ の開近傍なので，
$\exists \varepsilon_1 > 0$ s.t. $U_X \triangleq \{(x,1) \mid -\varepsilon_1 < x < \varepsilon_1\} \subset \pi^{-1}(U)$.
同様に，$\exists \varepsilon_2 > 0$ s.t. $V_X \triangleq \{(x,-1) \mid -\varepsilon_2 < x < \varepsilon_2\} \subset \pi^{-1}(V)$.
$\varepsilon \triangleq \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\varnothing \neq \{\{(x,1),(x,-1)\} \mid -\varepsilon < x < 0\} &\subset \pi(U_X) \cap \pi(V_X) \\ &\subset \pi(\pi^{-1}(U)) \cap \pi(\pi^{-1}(V)) \subset U \cap V\end{aligned}$$

より，$U \cap V = \varnothing$ とはできない.

教科書 pp. 116–117 の例2.15は,

第1可算公理を満たす位相空間の商集合で
第1可算公理をみたさないものが存在し,

第2可算公理を満たす位相空間の商集合で
第2可算公理をみたさないものが存在する

ことを示す例だが,

教科書に その定義が掲載されていない
「位相空間の直和」を用いているため,
本講義では扱わない.