集合と位相第二

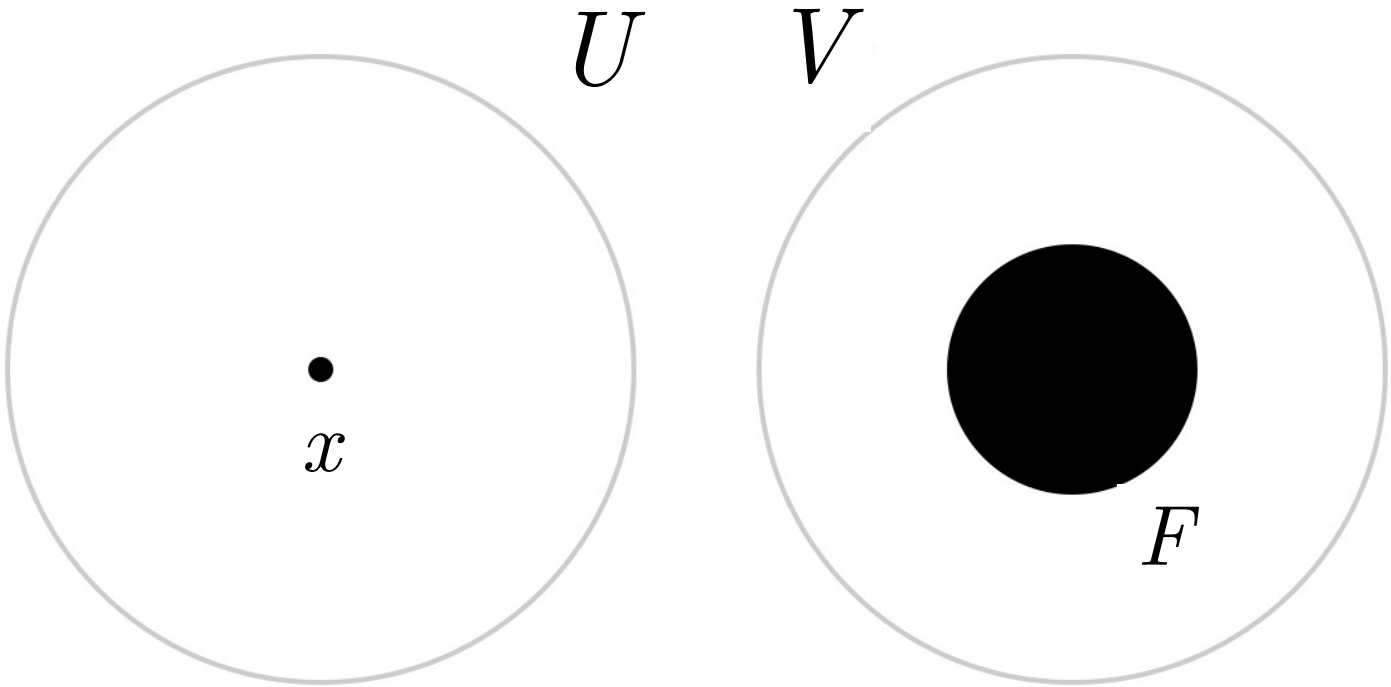
第8回　正則空間と正規空間

定義 2.32　X を位相空間とする．

1）X が T_1 空間であり，さらに X 上の任意の点 x とその点を含まない閉集合 F に対し，二つの開集合 U, V で

$$x \in U, \quad F \subset V \quad \text{かつ} \quad U \cap V = \emptyset$$

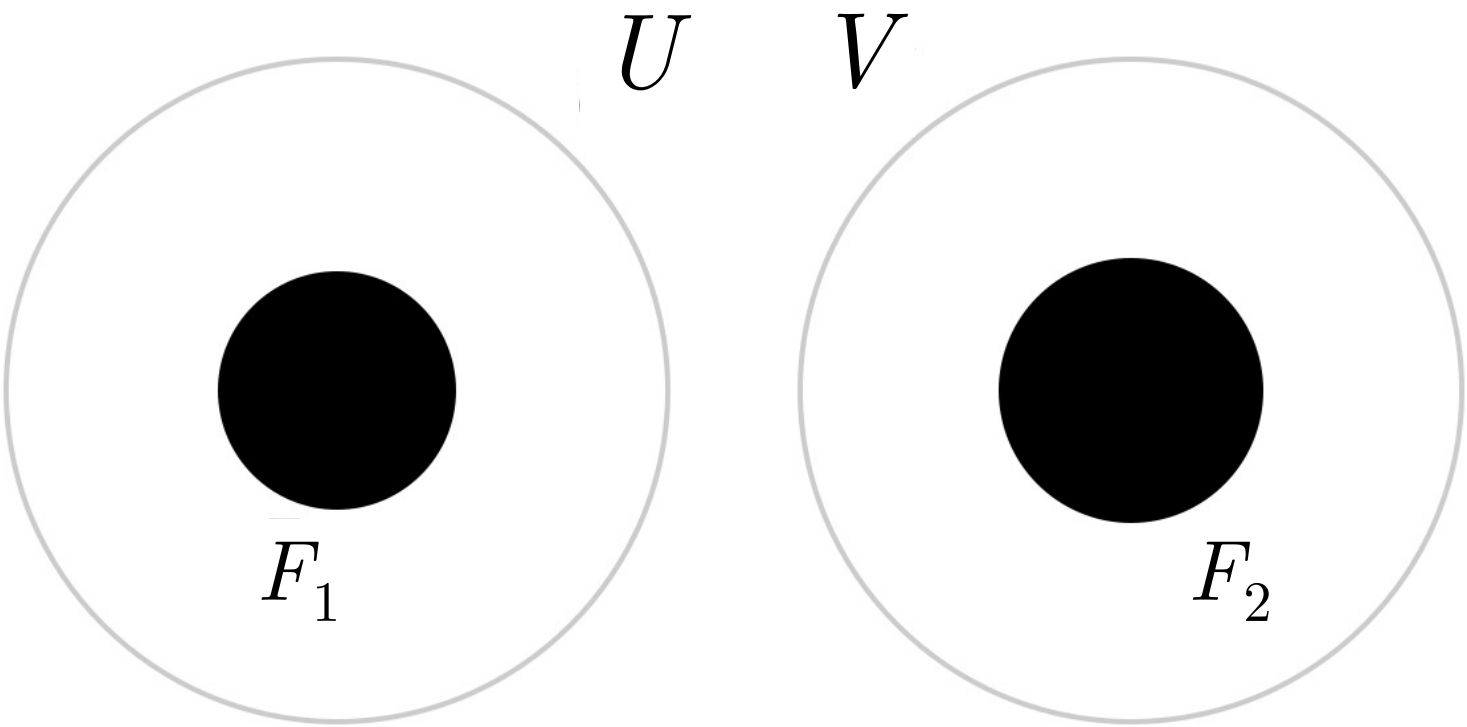
となるものが存在するとき，X は**正則**（regular）という．またこのような空間を**正則空間**という．



2）X が T_1 空間であり，さらに X の任意の互いに交わらない二つの閉集合 F_1, F_2 に対し，開集合 U, V で

$$F_1 \subset U, \quad F_2 \subset V \quad \text{かつ} \quad U \cap V = \emptyset$$

となるものが存在するとき，X は**正規**（normal）という．またこのような空間を**正規空間**という．



定義 2.32

1) Xが正則空間 $\Leftrightarrow$ XがT_1空間であり，かつT_3空間

2) Xが正規空間 $\Leftrightarrow$ XがT_1空間であり，かつT_4空間

上記の定義 1), 2) において，T_1 空間の仮定をはずした条件を満たす空間をそれぞれ T_3 空間，T_4 空間という場合がある．言い換えれば，T_3 空間とは任意の点とそれを含まない閉集合が開集合により分離されるような空間であり，T_4 空間とは二つの交わらない閉集合が開集合により分離されるような空間である．

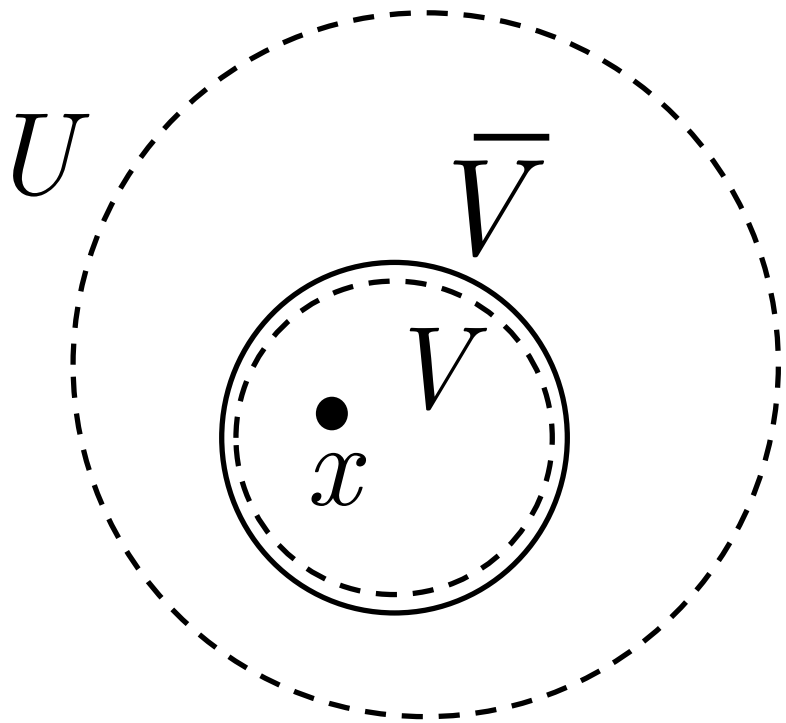
pp. 98-99

命題 2.11　X を位相空間とする．

1）X が T_3 空間 $\Longleftrightarrow$ 任意の点 $x \in X$ と開集合 $U \ni x$ に対し，ある開集合 V で

$$x \in V \subset \bar{V} \subset U$$

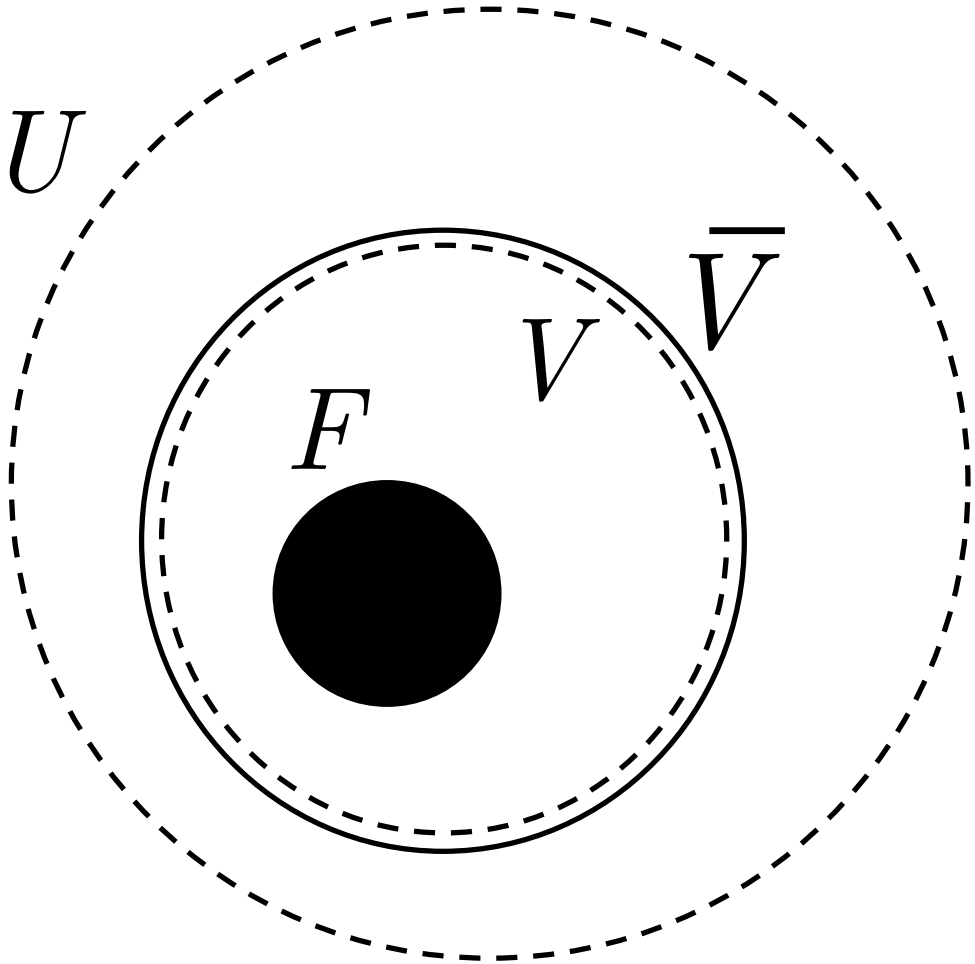
となるものが存在する．



2) X が T_4 空間 $\Longleftrightarrow$ 任意の閉集合 F とそれを含む開集合 $U \supset F$ に対し，ある開集合 V で

$$F \subset V \subset \bar{V} \subset U$$

となるものが存在する．



ここで注意することは，T_3 あるいは T_4 という分離条件からハウスドルフあるいは T_1 の条件は従わないということである．これは 1 点からなる集合が閉集合となるとは限らないためである．

例　密着位相空間は T_3空間であり，かつ T_4空間でもある（容易なので，各自示してみよ）．一方，2つ以上の要素を持つ密着位相空間は T_0空間ではない（これも容易）；よって，T_1空間でもなく，Hausdorff 空間でもない．

p. 99

定義から明らかに

$$\text{正規空間} \Longrightarrow \text{正則空間} \Longrightarrow \text{ハウスドルフ空間}$$

となる

p. 96

命題 2.10

1) X が T_1 空間 $\Longleftrightarrow$ 任意の点 $x \in X$ に対し $\{x\}$ が閉集合.

定理 2.12 距離空間は正規である.

証明 まず距離空間は明らかに T_1 空間である. そこで二つの交わらない閉集合 F_1, F_2 が開集合により分離されることを示せばよい.

$F_1=\varnothing$ または $F_2=\varnothing$ のときは明らかだから, $F_1\neq\varnothing$ かつ $F_2\neq\varnothing$ であるとする.

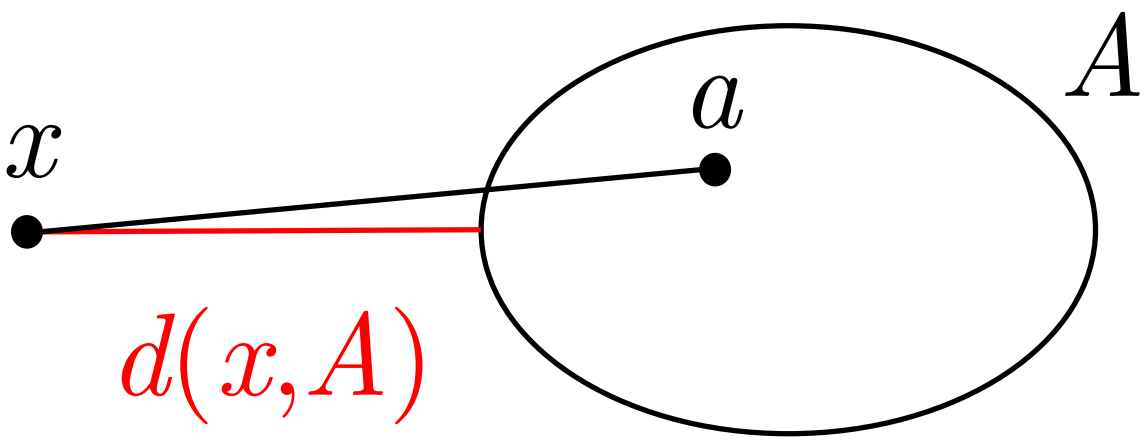
$d(x,A)$：点xと集合Aの距離

(the distance between the point x and the set A)

X を距離空間とする．空でない部分集合 $A \subset X$ と X 上の点 x に対して

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a); a \in A\}$$

とおく．



$\left|d(x,A)-d(y,A)\right| \leq d(x,y)$ の証明:

$x, y \in X, a \in A$ に対して,

$d(x,A) = \inf\{d(x,b) \mid b \in A\} \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$,

つまり　$d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,a)$.

ここで, $a \in A$ の任意性から

$d(x,A) \leq d(x,y) + \inf\{d(y,a) \mid a \in A\} = d(x,y) + d(y,A)$.

よって　$d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$.

x と y を入れ替えて, 同様に

$d(y,A) - d(x,A) \leq d(y,x) = d(x,y)$.

上の二つの不等式から与式が従う. (Q.E.D.)

p. 143

定理 2.36　二つの距離空間 X, Y の間の写像 $f : X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は，任意の点 $x \in X$ と任意の正数 ε に対し，ある $\delta > 0$ が存在して

$$f(U(x,\delta)) \subset U(f(x),\varepsilon)$$

となることである．

$$\Updownarrow$$

任意の $x' \in X$ について

$$d(x,x') < \delta \Rightarrow d(f(x),f(x')) < \varepsilon$$

p. 100 の場合，

$$\Big|d(x,A) - d(y,A)\Big| \leq d(x,y) < \delta \leq \varepsilon$$

また明らかに

$$d(x, A) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \bar{A}$$

となる.

証明

$$\begin{aligned} d(x, A) = 0 &\Leftrightarrow \inf\{d(x, a) \mid a \in A\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists a \in A \text{ s.t. } d(x, a) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; U(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \end{aligned}$$

(Q.E.D.)

定理 2.13　X を距離空間とし，$F_1, F_2 \subset X$ を二つの互いに交わらない閉集合とする．このとき，X 上の実数値連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ で

空でない

1）任意の $x \in X$ に対して $0 \leq f(x) \leq 1$

2）$F_1 = \{x \in X; f(x) = 0\}$

3）$F_2 = \{x \in X; f(x) = 1\}$

となるものが存在する．

証明　さて，仮定 $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ から任意の $x \in X$ に対して

$$d(x, F_1) \quad \text{または} \quad d(x, F_2) \neq 0$$

となる．そこで関数 $f : X \to \mathbb{R}$ を

$$X \ni x \longmapsto f(x) = \frac{d(x, F_1)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}$$

により定義する．このとき f は連続であり，また任意の $x \in X$ に対して $0 \leq f(x) \leq 1$ かつ

$$F_1 = \{x \in X; f(x) = 0\}, \quad F_2 = \{x \in X; f(x) = 1\}$$

となる．

章 末 問 題

2.8 X を位相空間とする．X 上の二つの実数値連続関数 f, g に対して，$f+g, fg, f/g : X \to \mathbb{R}$ を $(f+g)(x) = f(x)+g(x), (fg)(x) = f(x)g(x), (f/g)(x) = f(x)/g(x)$ $(x \in X)$ により定義する．ただし，f/g の場合には $g(x) \neq 0$ と仮定する．このとき，これらの関数はすべて連続であることを証明せよ．

$f : X \to [0,1]$ であれば これでも良いが,
今は $f : X \to \mathbb{R}$ としている ので (p. 100),
適切ではない.

$$U = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right), \quad V = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$$

とおけば，これらは開集合であり

$$U \supset F_1, \quad V \supset F_2, \quad U \cap V = \emptyset$$

となる．すなわち F_1, F_2 が開集合により分離され，証明が終わる． □

$$]a,b[\triangleq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$U = f^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\right), \quad V = f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, \infty\right[\right)$$

とおけば，これらは開集合であり

$$U \supset F_1, \quad V \supset F_2, \quad U \cap V = \emptyset$$

となる．すなわち F_1, F_2 が開集合により分離され，証明が終わる．　□

上式は，$U = f^{-1}\left(\left]-1, \frac{1}{2}\right[\right), \quad V = f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, 2\right[\right)$ などでも良い

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ を使わない理由

(a,b) では，開区間なのか順序対なのか区別がつきにくいことがあるため．

定理 2.12 距離空間は正規である.

注: 距離空間でない, 正規空間が存在する.

定理 2.14　第 2 可算公理を満たす正則空間は正規である．

証明　X を第 2 可算公理を満たす正則空間とする．互いに交わらない二つの閉集合 $F_1, F_2 \subset X$ が開集合により分離されることを示す．仮定から，高々可算個の元からなる X の開集合系の基 $\mathcal{O}$ が存在する．

$x \in F_1$ を任意の点とすれば $x \in X - F_2$ となる．$X - F_2$ は開集合であるから，命題 2.11 の 1) からある開集合 V で

$$x \in V \subset \bar{V} \subset X - F_2$$

となるものが存在する．ここで $\mathcal{O}$ は開集合系の基であるから，ある $U_x \in \mathcal{O}$ が存在して $x \in U_x \subset V$ となる．したがって $\overline{U_x} \subset \bar{V} \subset X \setminus F_2$ であるから

$$x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset X - F_2$$

となる．x は F_1 の任意の点であったから

pp. 101-102

ここで選択公理を用いている

x は F_1 の任意の点であったから

$$F_1 \subset \bigcup_{x \in F_1} U_x$$

となる．ここで各 U_x は高々可算個の元からなる $\mathcal{O}$ に属するから，ある元の列 $U_i \in \mathcal{O}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ が存在して

$$F_1 \subset \bigcup_i U_i, \quad F_2 \subset X - \overline{U_i}$$

となる．同様にして，ある元の列 $V_j \in \mathcal{O}$ $(j = 1, 2. \cdots)$ が存在して

$$F_2 \subset \bigcup_j V_j, \quad F_1 \subset X - \overline{V_j}$$

となる．そこで

となる．そこで

$$U_1' = U_1, \quad V_1' = V_1 \cap (X - \overline{U_1}) = V_1 \setminus \overline{U_1}$$

とおき，さらに $k = 2, 3, \cdots$ に対して帰納的に

$$U_k' = U_k \cap \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} (X - \overline{V_j'}) \right), \quad V_k' = V_k \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} (X - \overline{U_i'}) \right)$$

とおけば，これらはすべて開集合となる．

$$U_k' = U_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} \overline{V_j'}, \quad V_k' = V_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \overline{U_i'}$$

とおけば，これらはすべて開集合となる．U'_k, V'_k はいわば U_k, V_k の “不要な部分” を削り取った開集合である．しかし F_1, F_2 との共通部分については等式

$$U'_k \cap F_1 = U_k \cap F_1$$

$V'_k \subset V_k$ なので $\overline{V'_k} \subset \overline{V_k}$ ゆえ，

$F_1 \subset X \setminus \overline{V_k} \subset X \setminus \overline{V'_k}$ だから，

$$U'_k \cap F_1 = U_k \cap \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} \left(X \setminus \overline{V'_j} \right) \right) \cap F_1 = U_k \cap F_1$$

とおけば，これらはすべて開集合となる．U'_k, V'_k はいわば U_k, V_k の “不要な部分” を削り取った開集合である．しかし F_1, F_2 との共通部分については等式

$$U'_k \cap F_1 = U_k \cap F_1, \quad V'_k \cap F_2 = V_k \cap F_2$$

同様

とおけば，これらはすべて開集合となる．U'_k, V'_k はいわば U_k, V_k の “不要な部分” を削り取った開集合である．しかし F_1, F_2 との共通部分については等式

$$U'_k \cap F_1 = U_k \cap F_1, \quad V'_k \cap F_2 = V_k \cap F_2$$

が維持されているため

$$F_1 \subset U = \bigcup_i U'_i$$

$$U \cap F_1 = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U'_i \right) \cap F_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} (U'_i \cap F_1)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} (U_i \cap F_1) = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \right) \cap F_1 = F_1$$

とおけば，これらはすべて開集合となる．U'_k, V'_k はいわば U_k, V_k の “不要な部分” を削り取った開集合である．しかし F_1, F_2 との共通部分については等式

$$U'_k \cap F_1 = U_k \cap F_1, \quad V'_k \cap F_2 = V_k \cap F_2$$

が維持されているため

$$F_1 \subset U = \bigcup_i U'_i, \quad F_2 \subset V = \bigcup_j V'_j$$

同様

しかし F_1, F_2 との共通部分については等式

$$U'_k \cap F_1 = U_k \cap F_1, \quad V'_k \cap F_2 = V_k \cap F_2$$

が維持されているため

$$F_1 \subset U = \bigcup_i U'_i, \quad F_2 \subset V = \bigcup_j V'_j$$

となる．ここで U, V は開集合であり，$U \cap V = \emptyset$ となることが容易にわかり証明が終わる． $\square$

$U \cap V = \varnothing$ の証明:

U'_k の定義から, $j < k$ のとき $U'_k \cap V'_j = \varnothing$.
V'_kの定義から, $i \leq k$ のとき $V'_k \cap U'_i = \varnothing$.
よって, 任意の $i, j = 1, 2, \ldots$ について $U'_i \cap V'_j = \varnothing$ となる.
したがって,

$$U \cap V = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U'_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} V'_j \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(U'_i \cap V'_j \right) = \varnothing.$$

p. 102

2.4.3 可 分 空 間

定義 2.33 位相空間 X は，高々可算かつ稠密な部分集合 A が存在するとき可分（separable）という．

p. 83

定義 2.22 X を位相空間，$A \subset X$ をその部分集合とする．

1）$\bar{A} = X$ のとき A は X で稠密（dense）という．

命題 2.12　距離空間に対しては，第 2 可算公理を満たすことと可分であることとは同値である．

証明　定理 2.15 により第 2 可算公理を満たす位相空間は可分である．したがって，可分な距離空間が第 2 可算公理を満たすことを示せばよい．$A \subset X$ を X の高々可算かつ稠密な部分集合とする．このとき

$$\mathcal{O} = \left\{ U\left(a, \frac{m}{n}\right); a \in A, m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

とおけば，これは X の開集合からなる高々可算な集合となる．$\mathcal{O}$ が X の開集合系の基となることを示せば証明が終わる．U を X の空でない任意の開集合，$x \in U$ をその任意の点とする．このとき，ある $\varepsilon > 0$ が存在して $x \in U(x, \varepsilon) \subset U$ となる．一方，$\bar{A} = X$ であるから $U(x, \frac{\varepsilon}{3}) \cap A \neq \emptyset$ となる．そこでこの集合から点 a をとる．$\frac{\varepsilon}{3} < \frac{m}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ となるような $m, n \in \mathbb{N}$ を選べば

$$x \in U\left(a, \frac{m}{n}\right) \subset U(x, \varepsilon) \subset U$$

となる（図 2.9 参照）．

$U(a, \frac{m}{n}) \in \mathcal{O}$ であるから $\mathcal{O}$ は確かに開集合系の基となることがわかった．□

$$x \in U\left(a, \frac{m}{n}\right)$$

$$\because \quad d(x,a) < \frac{\varepsilon}{3} < \frac{m}{n}$$

$$U\left(a, \frac{m}{n}\right) \subset U(x, \varepsilon)$$

$$\because \quad y \in U\left(a, \frac{m}{n}\right) \Rightarrow d(a,y) < \frac{m}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow y \in U(x, \varepsilon)$$