集合と位相第二

第6回 直積位相

集合族の直積はつぎのように定義する．すなわち

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \left\{ a : \Lambda \to \bigcup_\lambda A_\lambda \text{ 写像; すべての } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } a(\lambda) \in A_\lambda \right\}$$

direct product

を添え字付けられた集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積と呼ぶ．各 A_λ を**直積因子**という．直積に属する元 a は，λ における値 a_λ を明示して

デカルト積

$$a = (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

Cartesian product

とも書く（$a(\lambda)$ の代わりに a_λ と書いた）．この場合 a_λ を a の λ 成分という．また対応

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \ni a \mapsto a_\lambda \in A_\lambda$$

により定義される写像

$$p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \longrightarrow A_\lambda$$

を λ 成分への（標準的）**射影**という．このように表せば，この直積の定義が確かに前に与えた有限個の場合の一般化になっていることがわかるだろう．

集合族の直積はつぎのように定義する．すなわち

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \left\{ a : \Lambda \to \bigcup_\lambda A_\lambda \text{ 写像; すべての } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } a(\lambda) \in A_\lambda \right\}$$

を添え字付けられた集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**直積**と呼ぶ．各 A_λ を**直積因子**という．

factor

直積に属する元 a は，λ における値 a_λ を明示して

$$a = (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

とも書く（$a(\lambda)$ の代わりに a_λ と書いた）．この場合 a_λ を a の λ **成分**という．

component

また対応

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \ni a \mapsto a_\lambda \in A_\lambda$$

により定義される写像

projection

$$p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \longrightarrow A_\lambda$$

を λ 成分への（標準的）**射影**という．このように表せば，この直積の定義が確かに前に与えた有限個の場合の一般化になっていることがわかるだろう．

定義 2.28 $\{(X_\lambda, \mathcal{U}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を Λ によって添え字付けられた位相空間の族とする．$X = \Pi_\lambda X_\lambda$ を集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積とし，$p_\lambda : X \to X_\lambda$ を λ 成分への射影とする．このとき，各 p_λ を連続とするような X 上の最弱位相 $\mathcal{U}$ を直積位相という．位相空間 $(X, \mathcal{U})$ を $\{(X_\lambda, \mathcal{U}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積空間といい

積位相

積空間

product topology

$$(X, \mathcal{U}) = \Pi_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda, \mathcal{U}_\lambda)$$

product space

と書く．位相 $\mathcal{U}$ の開集合系の基としては

$$\Pi_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \quad (U_\lambda \in \mathcal{U}_\lambda \text{ かつ有限個の } \lambda \text{ をのぞき } U_\lambda = X_\lambda)$$

の全体がとれる．

 命題2.9

2) さらに一般に，X を集合，Y_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を位相空間，$f_\lambda : X \to Y_\lambda$ を写像とする．このとき，すべての f_λ が連続となるような X 上の最弱位相が存在する．この位相の開集合系の基としては

$$f_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap f_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}) \quad (U_{\lambda_i} \in \mathcal{U}_{\lambda_i})$$

の全体がとれる．ここで $\mathcal{U}_\lambda$ は Y_λ の開集合系を表す．

証明　最弱位相の存在は，

$$\mathcal{O} \triangleq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{ f_\lambda^{-1}(U_\lambda) \mid U_\lambda \in \mathcal{U}_\lambda \}$$

として，系2.1 (p. 76) を適用すればよい．

後半は，$\mathcal{O}$が最弱位相の準基になっていることから明らか．

(Q.E.D.)

位相$\mathcal{U}$の開集合系の基としては

$$\Pi_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda \quad (U_\lambda \in \mathcal{U}_\lambda \text{ かつ有限個の } \lambda \text{ をのぞき } U_\lambda = X_\lambda)$$

の全体がとれる.

<u>証明</u>　命題2.9 2) より,

$$\left\{\bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}) \middle| n \in \mathbb{N}, \{\lambda_i\}_{i=1}^{n} \subset \Lambda, \forall i \in [n]; U_{\lambda_i} \in \mathcal{U}_{\lambda_i}\right\}$$

$([n] \triangleq \{1,2,\ldots,n\})$ は, $\mathcal{U}$の基になっている. ここで,

$$p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}) = \left\{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \middle| x_{\lambda_i} \in U_{\lambda_i}\right\} = \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \qquad \text{但し } U_\lambda = \begin{cases} U_{\lambda_i} & \lambda = \lambda_i \text{のとき} \\ X_\lambda & \lambda \neq \lambda_i \text{のとき} \end{cases}$$

したがって,

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}) = \left\{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \middle| \forall i \in [n]; x_{\lambda_i} \in U_{\lambda_i}\right\} = \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \qquad \text{但し } U_\lambda = \begin{cases} U_{\lambda_i} & \exists i \in [n] \text{ s.t. } \lambda = \lambda_i \text{のとき} \\ X_\lambda & \forall i \in [n]; \lambda \neq \lambda_i \text{のとき} \end{cases}$$

距離空間が二つ $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ 与えられているものとする．このとき，直積集合 $X_1 \times X_2$ 上の 2 点 $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2)$ に対して

$$d(p_1, p_2) = \sqrt{d_1(x_1, x_2)^2 + d_2(y_1, y_2)^2}$$

と定義すれば，d は $X_1 \times X_2$ 上の距離関数となることがわかる（検証は章末の問題 2.16 とする）．こうして得られた距離空間 $(X_1 \times X_2, d)$ を (X_1, d_1) と (X_2, d_2) の直積距離空間という．また，d を直積距離という．

product metric space　　product metric

(X_i, d_i) $(i = 1, \cdots, n)$ を n 個の距離空間とすれば，直積 $X = \Pi_{i=1}^n X_i$ 上の 2 点 $x = (x_i), y = (y_i)$ に対して

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^2}$$

とおけば，これは X 上の距離関数となる．

<u>証明</u>　$d(x, y) \geq 0$ は定義から明らか．

$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [n]; d_i(x_i, y_i) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [n]; x_i = y_i \Leftrightarrow x = y.$

$d(x, y) = d(y, x)$ も定義から明らか．

三角不等式の証明にはSchwarzの不等式を用いる（各自 試みよ）．

(X_i, d_i) $(i = 1, \cdots, n)$ を n 個の距離空間とすれば，直積 $X = \Pi_{i=1}^n X_i$ 上の 2 点 $x = (x_i), y = (y_i)$ に対して

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^2}$$

とおけば，これは X 上の距離関数となる．たとえば，n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は，明らかに 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の n 個の直積である．

直積距離 d の定める X 上の位相は直積位相と一致する．このことは任意の点 $x = (x_i) \in X$ と任意の正数 ε に対して包含関係

$$U_1\left(x_1, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \times \cdots \times U_n\left(x_n, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \subset U(x, \varepsilon) \subset U_1(x_1, \varepsilon) \times \cdots \times U_n(x_n, \varepsilon)$$

が成立することから従う．ここで $U_i(x_i, \varepsilon)$ は X_i における開球体を表すものとする．

補題 1

$$U_1\left(x_1, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \times \cdots \times U_n\left(x_n, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \subset U(x, \varepsilon) \subset U_1(x_1, \varepsilon) \times \cdots \times U_n(x_n, \varepsilon)$$

証明 $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in U_1\left(x_1, \varepsilon/\sqrt{n}\right) \times \cdots \times U_n\left(x_n, \varepsilon/\sqrt{n}\right)$

$$\Leftrightarrow \forall i \in [n]; y_i \in U_i\left(x_i, \varepsilon/\sqrt{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in [n]; d_i(x_i, y_i) < \varepsilon/\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\varepsilon/\sqrt{n})^2} = \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow y \in U(x, \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall i \in [n]; d_i(x_i, y_i) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in [n]; y_i \in U_i\left(x_i, \varepsilon\right)$$

$$\Leftrightarrow y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in U_1\left(x_1, \varepsilon\right) \times \cdots \times U_n\left(x_n, \varepsilon\right)$$

補題 2

$$\left\{ \prod_{i=1}^{n} U_i(x_i, r) \,\middle|\, r>0, \text{各} U_i(x_i, r) \text{ は} X_i \text{における開球体} \right\}$$

は, $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{n}$ の直積空間 $\prod_{i=1}^{n} X_i$ における
点 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の基本近傍系をなす.

証明　まず, 任意の $\prod_{i=1}^{n} U_i(x_i, r)$ は明らかに $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の開近傍である.
さて, V を x の近傍とすると, ある開集合 U が存在して $x \in U \subset V$ となる.
すると直積位相の基の要素 $\prod_{i=1}^{n} U_i$ (各 U_i は X_i の開集合)が存在して,
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} U_i \subset U$ となる.
このとき, 各 $i \in [n]$ について, $x_i \in U_i$ なので,
ある $\varepsilon_i > 0$ が存在して $U_i(x_i, \varepsilon_i) \subset U_i$ となる.
ここで, $r \triangleq \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$ とおくと,
各 $i \in [n]$ について $U_i(x_i, r) \subset U_i$ なので,
$x \in \prod_{i=1}^{n} U_i(x_i, r) \subset \prod_{i=1}^{n} U_i \subset U \subset V$ となる. (Q.E.D.)

直積距離 d の定める X 上の位相は直積位相と一致する.

<u>証明</u>　配付資料「集合と位相第二　第3回基と近傍系　補足」の

命題 2.2.2.D $\mathcal{U}, \mathcal{V}$: 集合 X 上の開集合系, $\mathcal{U}(x)$: $x \in X$ の $\mathcal{U}$ に関する基本近傍系, $\mathcal{V}(x)$: $x \in X$ の $\mathcal{V}$ に関する基本近傍系とするとき $\forall x \in X$, $\forall U \in \mathcal{U}(x)$, $\exists V \in \mathcal{V}(x)$ s.t. $V \subset U$ であれば, $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$.

に, 補題1の包含関係

$$U_1\left(x_1, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \times \cdots \times U_n\left(x_n, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \subset U(x, \varepsilon) \subset U_1(x_1, \varepsilon) \times \cdots \times U_n(x_n, \varepsilon)$$

と, $U_1(x_1, r) \times \cdots \times U_n(x_n, r)$が直積空間に関する基本近傍系であること(補題2)と, $U(x, r)$が直積距離空間 (X, d) における基本近傍系であることを適用すれば, 二つの位相が一致することがわかる. (Q.E.D.)

箱位相

直積 $X = \Pi_\lambda X_\lambda$ の位相としては，上記のものとは別に box topology

$$\Pi_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \quad (U_\lambda \in \mathcal{U}_\lambda)$$

strong topology

の全体を開集合系の基とする位相も考えられる．これを強位相という．これに対して上記の定義の位相は直積空間の弱位相と呼ばれることがある．添え字の集合 Λ が有限集合の場合は強位相と弱位相は同じものであるが，それが無限集合の場合は異なる位相となる．ふつう直積集合には直積位相（すなわち弱位相）を入れる．その一つの理由は，直積位相に関しては後に証明するチコノフの定理（2.5 節定理 2.28）という重要な定理が成立するためである．

weak topology

直積 $X = \Pi_\lambda X_\lambda$ の位相としては，上記のものとは別に

$$\Pi_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \quad (U_\lambda \in \mathcal{U}_\lambda)$$

の全体を開集合系の基とする位相も考えられる．これを**強位相**という．これに対して上記の定義の位相は直積空間の**弱位相**と呼ばれることがある．添え字の集合 Λ が有限集合の場合は強位相と弱位相は同じものであるが，それが無限集合の場合は異なる位相となる．

一般に

強位相と弱位相が異なる例

$n \in \mathbb{N}$ に対して，離散位相を持つ2点集合 $X_n \triangleq \{0,1\}$ を考え，

$X \triangleq \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ とおく.

$n \in \mathbb{N}$ に対して $O_n \triangleq \{0\}$ とし，$O \triangleq \prod_{n=1}^{\infty} O_n$ を考える.

O_n は X_n の開集合なので，

強位相の定義から O は強位相に関する開集合である.

O は空集合ではなく，弱位相の基

$$\left\{ \prod_{n=1}^{\infty} U_n \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N}; U_n \text{ は開集合，有限個の } n \text{ を除き } U_n = X_n \right\}$$

に属する集合 $\prod_{n=1}^{\infty} U_n$ を部分集合に持たないので，

弱位相の基に属する集合の合併集合にはなり得ない.

すなわち，O は弱位相に関する開集合ではない.

添え字集合 Λ が無限集合でも，強位相と弱位相が一致する例

Λ を無限集合とし，

すべての $\lambda \in \Lambda$ について X_λ を密着位相空間とすると，

定義から明らかに，

$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ 上の強位相も弱位相も密着位相になるので，

両者は一致する.

<u>系</u>　$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族，Y を位相空間とする．
すべての $\lambda\in\Lambda$ について $f_\lambda : Y \to X_\lambda$ が連続であるとき，
$f : Y \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda ; Y \ni y \mapsto (f_\lambda(y))_{\lambda\in\Lambda}$ は直積位相に関して連続．

<u>証明</u>　任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して，$p_\lambda \circ f = f_\lambda$ が連続なので，
命題2.7の前半より f も連続である．(Q.E.D.)

<u>例</u>　$\mathbb{R} \ni x \mapsto \sin x \in \mathbb{R}$ も $\mathbb{R} \ni x \mapsto \cos x \in \mathbb{R}$ も連続なので，
$\mathbb{R} \ni x \mapsto (\cos x, \sin x) \in \mathbb{R}^2$ も連続．