集合と位相第二

第4回 連続写像

2.3 連続写像と誘導位相

2.3.1 連 続 写 像

$\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が連続となるための必要十分条件を $\mathbb{R}$ の開集合の言葉で与えた 2.1 節の命題 2.2 をもとに，一般の位相空間の間の連続写像をつぎのように定義する．

定義 2.23 X, Y を位相空間とし，$f:X\to Y$ を X から Y への写像とする．Y の任意の開集合 $U\subset Y$ に対してその逆像 $f^{-1}(U)$ が X の開集合となるとき，f は**連続**（continuous）であるという．このような写像を**連続写像**（continuous mapping）という．

cont.

map

値域が $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ となるような連続写像 $X\to\mathbb{R}$(または $\mathbb{C}$) は，X 上の実数値（あるいは複素数値）連続関数（continuous function）と呼ばれる．

1.2.1　写像とその性質

A, B を二つの集合とする．A の任意の元 a に対して，B のある元 $f(a)$ を対応させる規則 f のことを A から B への**写像**（mapping）といい

$$f : A \longrightarrow B$$

終域／余域／終集合 (codomain)

と書く．また

$$A \ni a \mapsto f(a) \in B$$

と書くこともある．A を写像 f の**定義域**，B を f の**値域**という．

$$f(A') = \{f(a); a \in A'\} \subset B$$

を f による A' の**像**（image）という．とくに $f(A)$ を f の像といい，$\mathrm{Im}\, f$ と書くことが多い．

値域(range)の同値でない別定義：

f の像 $\mathrm{Rng}(f) \triangleq \mathrm{Range}(f) \triangleq f(A) = \left\{ f(a) \middle| a \in A \right\}$

現代的な用法での表現

に含まれる

値域が $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ ~~となる~~ような連続写像 $X \to \mathbb{R}$(または $\mathbb{C}$) は，X 上の実数値（あるいは複素数値）連続関数（continuous function）と呼ばれる．

終域

~~値域~~が $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ となるような連続写像 $X \to \mathbb{R}$(または $\mathbb{C}$) は，X 上の実数値（あるいは複素数値）連続関数（continuous function）と呼ばれる．

2.3 連続写像と誘導位相

2.3.1 連 続 写 像

$\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が連続となるための必要十分条件を $\mathbb{R}$ の開集合の言葉で与えた 2.1 節の命題 2.2 をもとに，一般の位相空間の間の連続写像をつぎのように定義する．

定義 2.23 X, Y を位相空間とし，$f:X\to Y$ を X から Y への写像とする．Y の任意の開集合 $U\subset Y$ に対してその逆像 $f^{-1}(U)$ が X の開集合となるとき，f は連続（continuous）であるという．このような写像を連続写像（continuous mapping）という．

func. / fun.

終域が $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ となるような連続写像 $X\to\mathbb{R}$(または $\mathbb{C}$) は，X 上の実数値（あるいは複素数値）連続関数（continuous function）と呼ばれる．

2.3 連続写像と誘導位相

2.3.1 連 続 写 像

$\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が連続となるための必要十分条件を $\mathbb{R}$ の開集合の言葉で与えた 2.1 節の命題 2.2 をもとに，一般の位相空間の間の連続写像をつぎのように定義する．

定義 2.23 X, Y を位相空間とし，$f:X\to Y$ を X から Y への写像とする．Y の任意の開集合 $U\subset Y$ に対してその逆像 $f^{-1}(U)$ が X の開集合となるとき，f は連続（continuous）であるという．このような写像を連続写像（continuous mapping）という．

real-valued complex-valued

終域が $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ となるような連続写像 $X\to\mathbb{R}$(または $\mathbb{C}$) は，X 上の実数値（あるいは複素数値）連続関数（continuous function）と呼ばれる．

命題 1.4 $f : A \to B$ を写像とする．このとき，A の部分集合 A_1, A_2 に対してつぎの式が成立する．

1）$A_1 \subset A_2$ ならば $f(A_1) \subset f(A_2)$.

2）$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

3）$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

また，B の部分集合 B_1, B_2 に対してつぎの式が成立する．

4）$B_1 \subset B_2$ ならば $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

5）$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

6）$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

a) $f^{-1}(B \setminus B_1) = A \setminus f^{-1}(B_1)$

b) $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$

c) $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$

$\{B_\lambda\} \subset \mathcal{P}(B)$ のとき

d) $f^{-1}\left(\bigcup_\lambda B_\lambda\right) = \bigcup_\lambda f^{-1}(B_\lambda)$

$g : B \to C,\ C_1 \subset C$ として

e) $(g \circ f)^{-1}(C_1) = f^{-1}(g^{-1}(C_1))$

差集合を $A - B$ と表わさない理由

たとえば $A, B \subset \mathbb{R}$ のとき,

$$A - B \triangleq \left\{ a - b \middle| a \in A, b \in B \right\}$$

という記法を用いることがあり,
混乱を招く恐れがある.

baseによる連続写像の特徴づけ

<u>命題</u> X, Yを top. sps., $\mathcal{V}$ をYの base とする.

$f : X \to Y$:cont. $\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V};\ f^{-1}(V)$: open in X

<u>証明</u> $(\Rightarrow)$ baseが開集合族であることから明らか.

$(\Leftarrow)$ 任意のU :open in Y について, ある$\{V_\lambda\} \subset \mathcal{V}$が存在して

$U = \bigcup_\lambda V_\lambda$と表わせ, このとき,

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_\lambda V_\lambda\right) = \bigcup_\lambda f^{-1}(V_\lambda)$$

だから, $f^{-1}(U)$: open in X なので, f :cont.である. (Q.E.D.)

subbaseによる連続写像の特徴づけ

<u>命題</u> X, Yを top. sps., $\mathcal{W}$ をYの subbase とする.

$f : X \to Y$:cont. $\Leftrightarrow \forall W \in \mathcal{W};\ f^{-1}(W)$: open in X

<u>証明</u> $(\Rightarrow)$ subbaseが開集合族であることから明らか.

$(\Leftarrow)$ subbaseに属する有限個の開集合の共通部分の全体が base になるので, 等式

$$f^{-1}(W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_k) = f^{-1}(W_1) \cap f^{-1}(W_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(W_k)$$

と一つ前で示したbaseに関する命題から明らか. (Q.E.D.)

定理 2.10　X, Y を位相空間とする．写像 $f : X \to Y$ が連続となるためには，つぎのいずれかの条件が成り立つことが必要十分である．

1) Y の任意の閉集合 $F \subset Y$ に対して $f^{-1}(F)$ が X の閉集合となる．

2) X の任意の部分集合 A に対して $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ となる．

証明　定義から開集合の補集合が閉集合であり，逆に閉集合の補集合は開集合となる．したがって 1) が必要十分条件となることは明らかである．

$f : A \to B$ の像と逆像に関する性質（追加分）

a) $B_1 \subset B$ のとき，$f^{-1}(B \setminus B_1) = A \setminus f^{-1}(B_1)$

$f(A) = f(f^{-1}(F)) \overset{\subset}{\cancel{=}} F$ であるから，結局 $f(\bar{A}) \subset \bar{F} = F$ が得られる．したがって $\bar{A} \subset f^{-1}(F) = A$ から $\bar{A} = A$ となり，A が閉集合となることがわかった．すなわち 1) が成立する．　□

$f : A \to B$ の像と逆像に関する性質（追加分）

c) $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$

$f(A) = f(f^{-1}(F)) \subset F$ であるから，結局 $f(\bar{A}) \subset \bar{F} = F$ が得られる．したがって $\bar{A} \subset f^{-1}(F) = A$ から $\bar{A} = A$ となり，A が閉集合となることがわかった．すなわち 1) が成立する．　□

$$\bar{A} \subset f^{-1}\left(f\left(\bar{A}\right)\right) \subset f^{-1}(F) = A$$

$f : A \to B$ の像と逆像に関する性質（追加分）

b) $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$

実数値関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の連続性については，まず与えられた点 $x\in\mathbb{R}$ において f が連続ということが定義され，すべての点 $x\in\mathbb{R}$ において連続のときに f は連続と定義されたのであった．位相空間の場合にも同様な定義がある．念のため以下にそれを述べる．しかし下記の命題 2.6 が示すように，上記の定義 2.23 が最も重要なものであり，ほとんどの場合それで充分である．

定義 2.24　X,Y を位相空間とし，$f:X\to Y$ を X から Y への写像とする．また $x\in X$ を X 上の点とする．$f(x)\in Y$ の任意の近傍 $U\in\mathcal{N}(f(x))$ に対し $f^{-1}(U)$ が x の近傍となるとき，f は x において連続という．

cont. at x

命題 2.6　X,Y を位相空間とする．写像 $f:X\to Y$ が連続であるための必要十分条件は，X 上のすべての点において f が連続となることである．

定義 2.24　X, Y を位相空間とし，$f : X \to Y$ を X から Y への写像とする．また $x \in X$ を X 上の点とする．$f(x) \in Y$ の任意の近傍 $U \in \mathcal{N}(f(x))$ に対し $f^{-1}(U)$ が x の近傍となるとき，f は x において連続という．

命題 2.6　X, Y を位相空間とする．写像 $f : X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は，X 上のすべての点において f が連続となることである．

証明　まず f が連続ならば f はすべての点 $x \in X$ において連続となるのは明らかである．

$x \in X, U \in \mathcal{N}(f(x))$ とする.

$\exists V$:open in Y s.t. $f(x) \in V \subset U$ だから,

f:cont.より $f^{-1}(V)$:open in X であって,

$x \in f^{-1}(V) \subset f^{-1}(U)$ なので, $f^{-1}(U) \in \mathcal{N}(x)$.

p. 79

部分集合 $U \subset X$ が開集合となるための必要十分条件は

$$\text{任意の } x \in U \text{ に対し } U \in \mathcal{N}(x) \tag{2.4}$$

証明　まず f が連続ならば f はすべての点 $x \in X$ において連続となるのは明らかである．逆を証明するために $U \subset Y$ を開集合とし，$x \in f^{-1}(U)$ を任意の点とする．このとき U は $f(x)$ の開近傍となる．仮定により f は x において連続であるから，x のある近傍 V が存在して $V \subset f^{-1}(U)$ となる．x は任意であったから $f^{-1}(U)$ は開集合となる．　□

位相空間の分類の基準を与えるのがつぎの定義である．

定義 2.25 X, Y を位相空間とする．写像 $f : X \to Y$ は，まずそれが全単射であり，さらに f とその逆写像 f^{-1} がともに連続のとき**同相写像**（homeomorphism）という．同相写像 $f : X \to Y$ が存在するような二つの位相空間 X, Y は互いに**同相**といい，$X \cong Y$ と書く．**位相同型**あるいは**同位相**という場合もある．

homeomorphic

homeo.

定義 2.25　X, Y を位相空間とする．写像 $f : X \to Y$ は，まずそれが全単射であり，さらに f とその逆写像 f^{-1} がともに連続のとき**同相写像**（homeomorphism）という．同相写像 $f : X \to Y$ が存在するような二つの位相空間 X, Y は互いに**同相**といい，$X \cong Y$ と書く．**位相同型**あるいは**同位相**という場合もある．

同相という関係は，位相空間全体の集まりにおいて同値関係となる（ただし，この集まりは集合とはならない）．位相空間 X が与えられたとき，その属する同値類を X の**同相類**という．

真のクラス (proper class)

定義 2.25　X, Y を位相空間とする．写像 $f : X \to Y$ は，まずそれが全単射であり，さらに f とその逆写像 f^{-1} がともに連続のとき**同相写像**（homeomorphism）という．同相写像 $f : X \to Y$ が存在するような二つの位相空間 X, Y は互いに**同相**といい，$X \cong Y$ と書く．**位相同型**あるいは**同位相**という場合もある．

同相という関係は，位相空間全体の集まりにおいて同値関係となる（ただし，この集まりは集合とはならない）．位相空間 X が与えられたとき，その属する同値類を X の**同相類**という．

homeomorphism class

この項の最後に位相空間の間の写像に関する定義をもう一つ述べておく．

定義 2.26　X, Y を位相空間とし，$f : X \to Y$ を写像とする．X の任意の開集合の f による像が Y の開集合となるとき，f は**開写像**（open mapping）という．また，X の任意の閉集合の f による像が Y の閉集合となるとき，f は**閉写像**（closed mapping）という．

簡単にわかるように，同相写像は開写像でもあり閉写像でもある．

<u>証明</u>　逆写像 f^{-1} による逆像 $(f^{-1})^{-1}(A)$ が像 $f(A)$ に一致することと，同相写像と開写像の定義から f は開写像である．
定理2.10 1) を用いれば，同様に f が閉写像であることが分かる．

$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ の証明

$$y \in (f^{-1})^{-1}(A) \Leftrightarrow f^{-1}(y) \in A \Leftrightarrow f(f^{-1}(y)) \in f(A) \Leftrightarrow y \in f(A)$$

$\uparrow$

$\Leftarrow$ の証明で，f が単射であることを用いる

証明　逆写像 f^{-1} による逆像 $(f^{-1})^{-1}(A)$ が像 $f(A)$ に一致することと，同相写像と開写像の定義から f は開写像である．

定理2.10 1) を用いれば，同様に f が閉写像であることが分かる．

例 2.9 (1) 写像 $f:\mathbb{R}\to S^1=\{z\in\mathbb{C};|z|=1\}$ を $f(x)=\exp 2\pi ix$ と定義する．この写像は開写像となるが，閉写像ではないことがわかる．

(2) X を集合とし，$\mathcal{U}_0,\mathcal{U}_\infty$ をそれぞれ X 上の密着位相と離散位相とする（例 2.4 参照）．このとき恒等写像 $\mathrm{id}:(X,\mathcal{U}_\infty)\to(X,\mathcal{U}_0)$ は連続となるが X が 2 個以上の元をもつとき，同相写像とはならない．

(3) 一般に X を集合とし，$\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2$ を X 上の二つの位相とする．このとき，恒等写像 $\mathrm{id}:(X,\mathcal{U}_1)\to(X,\mathcal{U}_2)$ が連続となるための必要十分条件は $\mathcal{U}_2\subset\mathcal{U}_1$ となること，すなわち $\mathcal{U}_1$ が $\mathcal{U}_2$ よりも強い位相となることである．とくに id が同相写像となるための必要十分条件は両者が一致することである．

<u>証明</u> $\mathrm{id}:(X,\mathcal{U}_1)\to(X,\mathcal{U}_2)$ が cont. $\Leftrightarrow \forall U\in\mathcal{U}_2;\mathrm{id}^{-1}(U)\in\mathcal{U}_1$
$\Leftrightarrow \forall U\in\mathcal{U}_2;U\in\mathcal{U}_1 \Leftrightarrow \mathcal{U}_2\subset\mathcal{U}_1$.
後半は, id が全単射であることに注意すれば,
$\mathrm{id}:(X,\mathcal{U}_1)\to(X,\mathcal{U}_2)$ が homeo.
$\Leftrightarrow \mathrm{id}:(X,\mathcal{U}_1)\to(X,\mathcal{U}_2)$ が cont. かつ $\mathrm{id}:(X,\mathcal{U}_2)\to(X,\mathcal{U}_1)$ が cont.
$\Leftrightarrow \mathcal{U}_2\subset\mathcal{U}_1$ かつ $\mathcal{U}_1\subset\mathcal{U}_2 \Leftrightarrow \mathcal{U}_1\subset\mathcal{U}_2$.