

## 集合と位相 第二 第3回 基と近傍系 補足

### 開集合系の基

教科書 定義 2.14 (の前半) (p. 77)  $(X, \mathcal{U})$  を位相空間とする.

$\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  が開集合系の基 (base) または開基 (open base)

$$\iff \forall U \in \mathcal{U}; \exists \mathcal{W} \subset \mathcal{V} \text{ s.t. } U = \bigcup \mathcal{W}.$$

記法.  $\mathcal{A}$  を集合族とするとき,

$$\bigcup \mathcal{A} \triangleq \{x \mid \exists A \in \mathcal{A} \text{ s.t. } x \in A\}, \quad \bigcap \mathcal{A} \triangleq \{x \mid \forall A \in \mathcal{A}; x \in A\}.$$

定義より  $\bigcup \emptyset = \emptyset$ .  $\mathcal{A} = \emptyset$  を全体集合  $X$  の部分集合族とみなすとき,  $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap \emptyset = X$ . ( $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ ,  $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$  と理解してよい.)

次の命題 2.2.2.A は, 教科書 定義 2.14 後半 (p. 77) の主張である (証明は課題とした).

命題 2.2.2.A  $(X, \mathcal{U})$  を位相空間,  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  とする.

$$\mathcal{V} \text{ が開集合系の基} \iff \forall U \in \mathcal{U}, \forall x \in U; \exists V \in \mathcal{V} \text{ s.t. } x \in V \subset U.$$

次の命題 2.2.2.B が示すように, 開集合系の基によって開集合を特徴付けることができる.

命題 2.2.2.B  $X$  を位相空間,  $\mathcal{V}$  を開集合系の基,  $U \subset X$  とするとき,

$$U \text{ が開集合} \iff \forall x \in U; \exists V_x \in \mathcal{V} \text{ s.t. } x \in V_x \subset U.$$

証明. ( $\Rightarrow$ ) 命題 2.2.2.A より明らか.

( $\Leftarrow$ )  $V_x$  は開集合だから, 開集合系の公理 3) (教科書 定義 2.12, p. 74) より  $U = \bigcup_{x \in U} V_x$  を示せば十分. まず,  $\forall x \in U; V_x \subset U$  から  $\bigcup_{x \in U} V_x \subset U$  である. 一方, 任意の  $x_0 \in U$  について  $x_0 \in V_{x_0} \subset \bigcup_{x \in U} V_x$  だから,  $U \subset \bigcup_{x \in U} V_x$ . よって,  $U = \bigcup_{x \in U} V_x$ . (Q.E.D.)

次の定理は, 部分集合族が開集合系の基であるための必要十分条件を与える.

定理 2.2.2.A.  $X$  を非空集合とし  $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X)$  とする.

$\mathcal{V}$  が次の 2 条件をともに満たすことは,  $\mathcal{V}$  がある開集合系  $\mathcal{U}$  の基となるための必要十分条件である.

$$1) \quad X = \bigcup \mathcal{V}$$

$$2) \quad \forall V_1, V_2 \in \mathcal{V}, \forall x \in V_1 \cap V_2, \exists V \in \mathcal{V} \text{ s.t. } x \in V \subset V_1 \cap V_2.$$

なお, このとき  $\mathcal{U} = \{\bigcup \mathcal{W} \mid \mathcal{W} \subset \mathcal{V}\}$  となっている.

**証明.** (必要性) 1) は全体集合  $X$  が開集合であることと前記の開集合系の基の定義 (教科書定義 2.14 の前半, p. 77) より明らか. 2) も  $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$  のとき  $V_1 \cap V_2$  が開集合であることと命題 2.2.2.A より明らか.

(十分性)  $\mathcal{U} \triangleq \{\bigcup \mathcal{W} \mid \mathcal{W} \subset \mathcal{V}\}$  とおく.  $\mathcal{U}$  が位相の公理 1), 2), 3) (教科書 定義 2.12, pp. 73–74) を満たせば,  $\mathcal{U}$  の定め方から  $\mathcal{V}$  が  $\mathcal{U}$  の基であることは明らかである.

1) 明らかに  $\emptyset = \bigcup \emptyset \in \mathcal{U}$ . 定理の条件 1) より  $X = \bigcup \mathcal{V} \in \mathcal{U}$ .

2)  $W_1, W_2 \in \mathcal{U}$  とすると,  $\exists \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2 \subset \mathcal{V}$  s.t.  $W_1 = \bigcup \mathcal{W}_1$ ,  $W_2 = \bigcup \mathcal{W}_2$ . 任意に  $x \in W_1 \cap W_2$  とすると, 合併集合の定義より  $\exists V_1 \in \mathcal{W}_1$  s.t.  $x \in V_1 \subset W_1$ ,  $\exists V_2 \in \mathcal{W}_2$  s.t.  $x \in V_2 \subset W_2$ . このとき  $x \in V_1 \cap V_2$  だから, 定理の条件 2) より  $\exists V \in \mathcal{V}$  s.t.  $x \in V \subset V_1 \cap V_2 \subset W_1 \cap W_2$ . そこで  $\mathcal{W} \triangleq \{V \in \mathcal{V} \mid V \subset W_1 \cap W_2\}$  とおけば, 上の議論から, 命題 2.2.2.B ( $\Leftarrow$ ) の証明とほぼ同様にして  $W_1 \cap W_2 = \bigcup \mathcal{W} \in \mathcal{U}$  となる.

3)  $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{U}$  とすると, 各  $\lambda \in \Lambda$  について, ある  $\mathcal{W}_\lambda \subset \mathcal{V}$  が存在して  $W_\lambda = \bigcup \mathcal{W}_\lambda$  となる.  $\mathcal{W} \triangleq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{W}_\lambda \subset \mathcal{V}$  とおくと  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\bigcup \mathcal{W}_\lambda) = \bigcup (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{W}_\lambda) = \bigcup \mathcal{W} \in \mathcal{U}$  となる. (Q.E.D.)

## 位相の生成と部分基

次の命題 2.2.1.A から, 部分基と教科書 系 2.1 (p. 76) の位相の生成の関係が解る.

**命題 2.2.1.A**  $X$  を非空集合とし,  $\mathcal{U}$  を  $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$  から生成される位相とするとき,  $\mathcal{O}$  は  $\mathcal{U}$  の部分基である.

**証明.**  $\mathcal{B} \triangleq \{\bigcap \mathcal{O}_0 \mid \mathcal{O}_0$  は  $\mathcal{O}$  の有限部分族 } とおき,  $\mathcal{B}$  が  $\mathcal{U}$  の基であること, すなわち  $\mathcal{U} = \{\bigcup \mathcal{B}' \mid \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}$  を示せばよい.

$\mathcal{U}$  の定義から明らかに  $\mathcal{O} \subset \mathcal{U}$  であって,  $\mathcal{U}$  は位相の公理 2) (教科書 定義 2.12, p. 73) を満たすから  $\mathcal{B}$  の定義より  $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ , このことと  $\mathcal{U}$  が位相の公理 3) (教科書 定義 2.12, p. 74) を満たすことより  $\{\bigcup \mathcal{B}' \mid \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\} \subset \mathcal{U}$  である. あとは,  $\{\bigcup \mathcal{B}' \mid \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}$  が位相の 3 公理 1), 2), 3) (教科書 定義 2.12, pp. 73–74) を満たすことを示せば,  $\mathcal{U}$  の最小性 (最弱性) から等号が従う.

1)  $\mathcal{B}_1 \triangleq \emptyset \subset \mathcal{B}$  とおけば  $\emptyset = \bigcup \emptyset = \bigcup \mathcal{B}_1 \in \{\bigcup \mathcal{B}' \mid \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}$ . また,  $\mathcal{O}_0 \triangleq \emptyset \subset \mathcal{O}$  とおけば,  $\mathcal{O}_0$  は有限部分族だから,  $X = \bigcap \emptyset = \bigcap \mathcal{O}_0 \in \mathcal{B}$  なので,  $X = \bigcup \{X\} \in \{\bigcup \mathcal{B}' \mid \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}$ .

2)  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}$  に対して,  $\mathcal{B}_3 \triangleq \{B_1 \cap B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$  とおけば,  $\mathcal{B}$  の定義から  $\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}$  である. よって,  $\bigcup \mathcal{B}_1 \cap \bigcup \mathcal{B}_2 = \bigcup \{B_1 \cap B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\} = \bigcup \mathcal{B}_3 \in \{\bigcup \mathcal{B}' \mid \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}$ .

3)  $\mathcal{B}_\lambda \subset \mathcal{B}$  ( $\forall \lambda \in \Lambda$ ) なる任意の族  $\{\mathcal{B}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  に対して,  $\mathcal{B}_0 \triangleq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_\lambda$  とおけば  $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$  なので,  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\bigcup \mathcal{B}_\lambda) = \bigcup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_\lambda = \bigcup \mathcal{B}_0 \in \{\bigcup \mathcal{B}' \mid \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}$ . (Q.E.D.)

**教科書 系 2.2** (p. 76)  $X$  を非空集合とし,  $\{\mathcal{U}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  を  $X$  上の位相からなる任意の族とする ( $\Lambda = \emptyset$  も可). このとき, 位相  $\sup \{\mathcal{U}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  が存在し, それは任意の  $\mathcal{U}_\lambda$  よりも強い位相の中で最弱のものである. さらに, この位相の開集合系  $\sup \{\mathcal{U}_\lambda\}$  の基として  $\{\bigcap_{\lambda \in \Lambda_0} U_\lambda \mid \Lambda_0$  は  $\Lambda$  の有限部分集合,  $\forall \lambda \in \Lambda_0; U_\lambda \in \mathcal{U}_\lambda\}$  がとれる.

**証明.** 教科書 命題 2.3 (pp. 75–76) より  $\mathcal{V} \triangleq \inf \{\{\mathcal{U}_\lambda\}$  の上界 }  $= \bigcap \{\mathcal{W} \in \mathcal{T}(X) \mid \forall \lambda \in \Lambda; \mathcal{U}_\lambda \subset \mathcal{W}\}$  が存在する.  $\mathcal{V}$  の与え方から,  $\mathcal{V}$  が  $\{\mathcal{U}_\lambda\}$  の上界全体の最小元, すなわち上限  $\sup \{\mathcal{U}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  であることは明らか.

(後半は教科書 章末問題 2.3, p. 166 (解答 p. 211) で扱うが, ここにも記す).  
 $\sup\{\mathcal{U}_\lambda\}$  は, 任意の  $\lambda \in \Lambda$  について  $\mathcal{U}_\lambda$  より強い最小 (最弱) の位相だから,  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{U}_\lambda$  より強い最小 (最弱) の位相, すなわち,  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{U}_\lambda$  から生成される位相である. よって,  $\{\bigcap_{\lambda \in \Lambda_0} U_\lambda \mid \Lambda_0 \text{ は } \Lambda \text{ の有限部分集合}, \forall \lambda \in \Lambda_0; U_\lambda \in \mathcal{U}_\lambda\}$  が開集合系  $\sup\{\mathcal{U}_\lambda\}$  の基になっていることは, 各  $\mathcal{U}_\lambda$  が位相であること (特に位相の公理 2), 教科書 定義 2.12, p. 73) と命題 2.2.1.A (の証明) より明らか. (Q.E.D.)

## 基本近傍系

教科書 命題 2.5 (pp. 80–81) の証明に必要な補題 2.2.2.A をまず示す.

**補題 2.2.2.A**  $X$  が位相空間,  $\mathcal{U}(x)$  が  $x \in X$  の基本近傍系のとき,  $x$  の近傍系  $\mathcal{N}(x)$  は次式で与えられる :

$$\mathcal{N}(x) = \{U \subset X \mid \exists V \in \mathcal{U}(x) \text{ s.t. } V \subset U\}.$$

**証明.** ( $\subset$ ). 基本近傍系の定義 (教科書 定義 2.18, p. 80) より明らか.

( $\supset$ ).  $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{N}(x)$  と近傍系の性質 (教科書 命題 2.4 性質 2), p. 78) より明らか.  
(Q.E.D.)

**教科書 命題 2.5** (pp. 80–81)  $X$  を位相空間とし,  $\mathcal{U}(x)$  を点  $x \in X$  の基本近傍系とする. このとき, つぎの条件が満たされる.

- 1)  $\mathcal{U}(x) \neq \emptyset$ .  $\forall U \in \mathcal{U}(x); x \in U$ .
- 2)  $U, V \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \exists W \in \mathcal{U}(x) \text{ s.t. } W \subset U \cap V$ .
- 3)  $\forall U \in \mathcal{U}(x); \exists W \in \mathcal{U}(x) \text{ s.t. } \forall y \in W; \exists U_y \in \mathcal{U}(y) \text{ s.t. } U_y \subset U$ .

逆に, 各点  $x \in X$  において上記の 3 条件を満たす  $\mathcal{U}(x)$  が与えられれば,  $\mathcal{U}(x)$  が基本近傍系になるような位相が  $X$  上に一意に存在する.

**証明.** (前半) . 1)  $X$  は  $x$  の近傍だから  $X \in \mathcal{N}(x)$  である. 基本近傍系の定義 (教科書 定義 2.18, p. 80) から, この  $X$  に対して, ある  $U \in \mathcal{U}(x)$  が存在して  $U \subset X$  となるので,  $\mathcal{U}(x) \neq \emptyset$  である. 第 2 の主張も基本近傍系の定義から明らか.

2)  $U, V \in \mathcal{U}(x)$  とすると,  $U, V \in \mathcal{N}(x)$  より教科書 命題 2.4 性質 3) (p. 78) から  $U \cap V \in \mathcal{N}(x)$  である.  $\mathcal{U}(x)$  は基本近傍系であるから, その定義より  $W \subset U \cap V$  なる  $W \in \mathcal{U}(x)$  が存在する.

3) 任意に  $U \in \mathcal{U}(x)$  を固定する.  $U \in \mathcal{N}(x)$  より教科書 命題 2.4 性質 4) (p. 78) から,  $\exists V \in \mathcal{N}(x) \text{ s.t. } \forall y \in V; U \in \mathcal{N}(y)$ . このとき,  $\mathcal{U}(x)$  は基本近傍系であるから,  $W \subset V$  なる  $W \in \mathcal{U}(x)$  が存在する. 任意に  $y \in W$  を固定する.  $y \in V$  だから  $U \in \mathcal{N}(y)$  である.  $\mathcal{U}(y)$  は基本近傍系だから,  $U_y \subset U$  なる  $U_y \in \mathcal{U}(y)$  が存在する.

(後半) .  $\mathcal{N}(x) \triangleq \{U \subset X \mid \exists V \in \mathcal{U}(x) \text{ s.t. } V \subset U\}$  とおく.  $\emptyset \neq \mathcal{U}(x) \subset \mathcal{N}(x)$  より  $\mathcal{N}(x) \neq \emptyset$  である. 上記の補題 2.2.2.A より,  $\mathcal{U}(x)$  を基本近傍系とする近傍系があるとすれば, それは  $\mathcal{N}(x)$  しかない.

あとは,  $\mathcal{N}(x)$  が教科書 命題 2.4 (p. 78) の 4 性質 1)–4) を持つことを示せば教科書 定理 2.8 (p. 79) より結論が従う.

- 1) 任意の  $U \in \mathcal{N}(x)$  について,  $\mathcal{N}(x)$  の定義よりある  $V \in \mathcal{U}(x)$  が存在して  $V \subset U$  であって, 教科書 命題 2.5 条件 1) より  $x \in V$  なので,  $x \in U$  である.
- 2)  $\mathcal{N}(x)$  の定義から明らか.
- 3)  $U_1, U_2 \in \mathcal{N}(x)$  とすると,  $\mathcal{N}(x)$  の定義から,  $V_1 \subset U_1$  かつ  $V_2 \subset U_2$  なる  $V_1, V_2 \in \mathcal{U}(x)$  が存在する. 教科書 命題 2.5 条件 2) より  $W \subset V_1 \cap V_2$  なる  $W \in \mathcal{U}(x)$  が存在し, このとき  $W \subset U_1 \cap U_2$  となっているので,  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{N}(x)$  である.
- 4) 任意に  $U \in \mathcal{N}(x)$  を固定する.  $\mathcal{N}(x)$  の定義から  $V \subset U$  なる  $V \in \mathcal{U}(x)$  が存在する. このとき, 教科書 命題 2.5 条件 3) より,  $\exists W \in \mathcal{U}(x)$  s.t.  $\forall y \in W; \exists U_y \in \mathcal{U}(y)$  s.t.  $U_y \subset V$  である.  $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{N}(x)$  より  $W \in \mathcal{N}(x)$  であり, 各  $y \in W$  について,  $\mathcal{U}(y) \ni U_y \subset V \subset U$  なので,  $\mathcal{N}(y)$  の定義から  $U \in \mathcal{N}(y)$  である.

次の命題 2.2.2.C が示すように, 基本近傍系を使って開集合を特徴づけられる.

**命題 2.2.2.C**  $X$  を位相空間,  $\mathcal{U}(x)$  を  $x \in X$  の基本近傍系,  $U \subset X$  とする.

$U$  が開集合  $\iff \forall x \in U; \exists V \in \mathcal{U}(x)$  s.t.  $V \subset U$ .

**証明.** ( $\Rightarrow$ )  $U$  が開集合で  $x \in U$  のとき  $U$  は  $x$  の近傍であるから, 基本近傍系の定義 (教科書 定義 2.18, p. 80) より明らか.

( $\Leftarrow$ ) 任意に  $x \in U$  とする. 仮定より,  $x \in V \subset U$  なる  $V \in \mathcal{U}(x)$  が存在する.  $V \in \mathcal{U}(x) \subset \mathcal{N}(x)$  で  $V \subset U$  だから近傍系の性質 (教科書 命題 2.4 性質 2), p. 78) より  $U \in \mathcal{N}(x)$  である. 教科書 定理 2.8 の証明の (2.4) の箇所 (p. 79) から  $U$  は開集合である. (Q.E.D.)

**命題 2.2.2.D**  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ : 集合  $X$  上の開集合系,  $\mathcal{U}(x)$ :  $x \in X$  の  $\mathcal{U}$  に関する基本近傍系,  $\mathcal{V}(x)$ :  $x \in X$  の  $\mathcal{V}$  に関する基本近傍系とするとき  $\forall x \in X, \forall U \in \mathcal{U}(x), \exists V \in \mathcal{V}(x)$  s.t.  $V \subset U$  であれば,  $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ .

**証明.**  $U \in \mathcal{U}$  とし,  $x \in U$  とすると,  $\exists U_x \in \mathcal{U}(x)$  s.t.  $U_x \subset U$ . 仮定から,  $\exists V_x \in \mathcal{V}(x)$  s.t.  $V_x \subset U_x \subset U$ . よって, 命題 2.2.2.C より  $U \in \mathcal{V}$ . (Q.E.D.)

## 稠密と疎

**教科書 例 2.8** (p. 83) (2)  $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$  とする. このとき,  $\bar{A} = A \cup \{0\}$  となる. 0 は  $A$  の集積点であり, 任意の  $n$  に対し  $\frac{1}{n}$  はすべて  $A$  の孤立点である. また  $A^\circ = \emptyset$  である.

**証明.** (2) 任意の  $\varepsilon > 0$  について,  $U(0, \varepsilon) \cap (A \setminus \{0\}) = U(0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$  なので, 0 は  $A$  の集積点である (したがって  $0 \in \bar{A}$ ).  $(A \cup \{0\})^c = (-\infty, 0) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) \cup (1, \infty)$  は開集合なので,  $A \cup \{0\}$  は閉集合.  $A$  の閉包は,  $A$  を含む最小の閉集合だったから,  $\bar{A} = A \cup \{0\}$ .  $U\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \cap A = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$  だから,  $\frac{1}{n}$  は孤立点. 任意の  $n \in \mathbb{N}$  と任意の  $\varepsilon > 0$  について  $U\left(\frac{1}{n}, \varepsilon\right) \not\subset A$  なので,  $A$  は内点を持たない. よって  $A^\circ = \emptyset$ . (Q.E.D.)

**補足.** 上記の例 2.8 (2)において,  $(\bar{A})^\circ = \emptyset$ , すなわち  $A$  は  $\mathbb{R}$  で疎.

**証明.** 上の証明に加えて, 任意の  $\varepsilon > 0$  について  $U(0, \varepsilon) \not\subset \bar{A}$  なので,  $\bar{A}$  も内点を持たない. よって  $(\bar{A})^\circ = \emptyset$ . (Q.E.D.)