集合と位相第二

第2回 距離空間と位相空間

2.1.3 距離空間

ユークリッド空間の距離の性質（命題 2.1）をもとに，つぎのように定義する．

定義 2.8 X を空でない集合とする．$X \times X$ 上の実数値関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が与えられ，それがつぎの三つの性質を満たすとする．

1）任意の $x, y \in X$ に対し，$d(x, y) \geq 0$ であり，$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

2）任意の $x, y \in X$ に対し，$d(x, y) = d(y, x)$.

3）（三角不等式）任意の $x, y, z \in X$ に対して，$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

このとき，d は X 上の距離関数であるという．また (X, d)（あるいは単に X）を距離空間（metric space）という．

metric / distance / distance function

例 2.3 (1) $X = \mathbb{R}^n$ とする．このとき，つぎの三つの関数はいずれも距離関数となる（d_1 はすでに考察したユークリッド空間の距離である）．

1）$d_1(x, y) = \|x - y\|$

2）$d_2(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$

3）$d_3(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

ただし $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$ とする．

(2) 単位閉区間 $I = [0, 1]$ 上の実数値連続関数の全体を $C(I)$ と書く．このとき，$f, g \in C(I)$ に対して

1）$d_1(f, g) = \left(\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$

2）$d_2(f, g) = \max_{x \in I} |f(x) - g(x)|$

とおけば，これらはいずれも $C(I)$ 上の距離関数となる．このうち第 2 の距離 d_2 については，3.1 節でもっと一般的な状況で詳しく調べることにする．

上記のうち，第 1 と第 5 以外の関数が距離を定義することの検証は章末の問題 2.2 とする．

2) $d_2(x,y) = \max_i \left| x_i - y_i \right|$

証明

1) $d_2(x,y) = \max_i \left| x_i - y_i \right| \geq 0.$

$$
\begin{aligned}
d_2(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \max_i \left| x_i - y_i \right| = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall i \in [n] (\triangleq \{1,2,\ldots,n\}) \left| x_i - y_i \right| = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall i \in [n]\ x_i = y_i \\
&\Leftrightarrow x = y
\end{aligned}
$$

2) $d_2(x,y) = \max_i \left| x_i - y_i \right| = \max_i \left| y_i - x_i \right| = d_2(y,x)$

3) ある $j \in [n]$ があって $d_2(x,z) = \max_i \left| x_i - z_i \right| = \left| x_j - z_j \right|$ なので,

$$
\begin{aligned}
\left| x_j - z_j \right| &\leq \left| x_j - y_j \right| + \left| y_j - z_j \right| \\
&\leq \max_i \left| x_i - y_i \right| + \max_i \left| y_i - z_i \right| = d_2(x,y) + d_2(y,z)
\end{aligned}
$$

3) $d_3(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i - y_i \right|$

証明

1) $d_3(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i - y_i \right| \geq 0.$

$$
\begin{aligned}
d_3(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left| x_i - y_i \right| = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall i \in [n] (\stackrel{\Delta}{=} \{1,2,\ldots,n\}) \left| x_i - y_i \right| = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall i \in [n]\ x_i = y_i \\
&\Leftrightarrow x = y
\end{aligned}
$$

2) $d_3(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i - y_i \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| y_i - x_i \right| = d_3(y,x)$

3)
$$
\begin{aligned}
d_3(x,z) &= \sum_{i=1}^{n} \left| x_i - z_i \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\left| x_j - y_j \right| + \left| y_j - z_j \right| \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left| x_j - y_j \right| + \sum_{i=1}^{n} \left| y_i - z_i \right| = d_3(x,y) + d_3(y,z)
\end{aligned}
$$

さらに X を距離空間とし，A をその部分集合とする．このとき X の点が A との位置関係により定義 2.4 と同様にして，内点，外点，境界点の 3 種類に分類される．また集積点，触点，孤立点も全く同様にして定義される．

定義 2.4　A を X の部分集合とする．

1）A に属する点 $x \in A$ は，$U(x, \varepsilon) \subset A$ となるような $\varepsilon > 0$ が存在するとき A の**内点**という．

2）A の補集合 $X - A$ の内点を A の**外点**という．

3）A の内点でも外点でもない点を A の**境界点**という．

4）任意の $\varepsilon > 0$ に対して $U(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ となる点 $x \in X$ を A の**触点**という．

5）$A - \{x\}$ の触点となるような点 $x \in X$ を A の**集積点**という．

6）A の集積点ではない点 $x \in A$ を A の**孤立点**という．

定義 2.11　(X, d) を距離空間とする．X の部分集合 A に対して

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(x, y); x, y \in A\}$$

とおき，これを A の直径（diameter）という．また，$\operatorname{diam} A < \infty$ となるような A を有界な部分集合という．

Aは非有界 $\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}$ 有界でない$\left(\Leftrightarrow \operatorname{diam} A = \infty\right)$

2.2　位相と位相空間

2.2.1　位　相　空　間

前節で考察した n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ と，その開集合の性質（定理 2.1）をもとに，一般の位相空間をつぎのように定義する．

定義 2.12　X を空でない集合とする．X の部分集合の族 $\mathcal{U}$ でつぎの条件を満たすものが与えられているとき，$\mathcal{U}$ は X 上に位相（topology）あるいは位相構造を定めるという．

top.

1）$\emptyset, X \in \mathcal{U}$.

2）$U_1, U_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$.

3）$\mathcal{U}$ の元からなる任意の集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し $\cup_\lambda U_\lambda \in \mathcal{U}$.

また，対 $(X, \mathcal{U})$ を位相空間（topological space）という．

top. sp.

2.2　位相と位相空間

2.2.1　位　相　空　間

前節で考察した n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ と，その開集合の性質（定理 2.1）をもとに，一般の位相空間をつぎのように定義する．

定義 2.12　X を空でない集合とする．X の部分集合の族 $\mathcal{U}$ でつぎの条件を満たすものが与えられているとき，$\mathcal{U}$ は X 上に位相（topology）あるいは位相構造を定めるという．

topological structure

1）$\emptyset, X \in \mathcal{U}$.

2）$U_1, U_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$.

3）$\mathcal{U}$ の元からなる任意の集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し $\cup_\lambda U_\lambda \in \mathcal{U}$.

また，対 $(X, \mathcal{U})$ を位相空間（topological space）という．

1) $\emptyset, X \in \mathcal{U}$.

2) $U_1, U_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$.

3) $\mathcal{U}$ の元からなる任意の集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し $\cup_\lambda U_\lambda \in \mathcal{U}$.

system of open sets

$\mathcal{U}$ に属する X の部分集合 U を，(この位相に関する) **開集合**といい，また $\mathcal{U}$ を**開集合系**という．条件 1) は空集合 $\emptyset$ と X 全体が開集合であり，条件 2) は (2 個の，したがって帰納的に) 有限個の開集合 $U_1, U_2, \cdots, U_k$ の共通部分 $\cap_{i=1}^{k} U_i$ は開集合であることを要請していることになる．また条件 3) は任意個数の開集合 U_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の和集合 $\cup_\lambda U_\lambda$ は開集合となることを要請するものである．

位相空間 $(X, \mathcal{U})$ において $\mathcal{U}$ があらかじめわかっている場合には，単に X を位相空間ということもある．位相が与えられている場合には，X の元 $x \in X$ を位相空間 X の点と呼ぶ場合が多い．

(2) 一般に距離空間 (X, d) に対して，その開集合は定義 2.9 により定められた．したがって，定理 2.4 から X は位相空間となる．これを距離 d の定める位相という．

topology induced by the metric d

距離位相 (metric topology)

(3) 任意の空でない集合 X に対し，(a) $\mathcal{U} = \{\emptyset, X\}$，(b) $\mathcal{U} = \mathcal{P}(X)$ はいずれも位相を定める．前者を密着位相，後者を離散位相（discrete topology）という．離散位相は X のすべての部分集合を開集合とする位相である．

indiscrete topology / trivial topology

同じ集合 X 上に二つの位相 $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ が与えられているとしよう．$\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$ のとき，言い換えれば $\mathcal{U}_1$ に関する開集合が常に $\mathcal{U}_2$ に関しても開集合であるとき，$\mathcal{U}_1$ は $\mathcal{U}_2$ よりも弱い位相であるという．逆に $\mathcal{U}_2$ は $\mathcal{U}_1$ よりも強い位相であるという．

weaker　　stronger

粗い　　細かい

coarser　　finer

小さい　　大きい

smaller　　larger

命題 2.3　X を集合とし，$\{\mathcal{U}_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ を X 上の位相からなる任意の集合とする．このとき $\cap_\lambda \mathcal{U}_\lambda$ もまた X 上の位相となる．さらに $\cap_\lambda \mathcal{U}_\lambda = \inf\{\mathcal{U}_\lambda\}$ となる．

証明　$\cap_\lambda \mathcal{U}_\lambda$ が位相となるための 3 条件（定義 2.12）のうち 1) は明らかに成立する．2) を確かめよう．$U_1, U_2 \in \cap_\lambda \mathcal{U}_\lambda$ とする．このとき，任意の λ に対して $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_\lambda$ となる．$\mathcal{U}_\lambda$ は位相であるから $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_\lambda$ となる．したがって $U_1 \cap U_2 \in \cap_\lambda \mathcal{U}_\lambda$ となる．3) も同様にして確かめられる．最後の主張は明らかである．　□

$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{U}_\lambda$とする. 任意の$\mu \in \Lambda$について, $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{U}_\mu$であり, $\mathcal{U}_\mu$は位相だから$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{U}_\mu$. したがって, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{U}_\lambda$.

命題 2.3　X を集合とし，$\{\mathcal{U}_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$ を X 上の位相からなる任意の集合とする．このとき $\cap_\lambda\mathcal{U}_\lambda$ もまた X 上の位相となる．さらに $\cap_\lambda\mathcal{U}_\lambda=\inf\{\mathcal{U}_\lambda\}$ となる．

証明　$\cap_\lambda\mathcal{U}_\lambda$ が位相となるための 3 条件（定義 2.12）のうち 1) は明らかに成立する．2) を確かめよう．$U_1,U_2\in\cap_\lambda\mathcal{U}_\lambda$ とする．このとき，任意の λ に対して $U_1,U_2\in\mathcal{U}_\lambda$ となる．$\mathcal{U}_\lambda$ は位相であるから $U_1\cap U_2\in\mathcal{U}_\lambda$ となる．したがって $U_1\cap U_2\in\cap_\lambda\mathcal{U}_\lambda$ となる．3) も同様にして確かめられる．最後の主張は明らかである．　□

任意の$\mu\in\Lambda$について，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{U}_\lambda\subset\mathcal{U}_\mu$であるから，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{U}_\lambda$は$\left\{\mathcal{U}_\lambda\middle|\lambda\in\Lambda\right\}$の下界である．$X$上の位相$\mathcal{U}$を$\left\{\mathcal{U}_\lambda\middle|\lambda\in\Lambda\right\}$の任意の下界とすると，任意の$\lambda\in\Lambda$について$\mathcal{U}\subset\mathcal{U}_\lambda$だから，共通集合の性質より$\mathcal{U}\subset\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{U}_\lambda$となる．よって，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{U}_\lambda$は$\left\{\mathcal{U}_\lambda\middle|\lambda\in\Lambda\right\}$の下界全体の最大元，すなわち下限である．

系 2.1　X を集合とする．X の部分集合からなる任意の集合族

$$\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$$

に対し，$\mathcal{O} \subset \mathcal{U}$ となる最弱位相 $\mathcal{U}$ が定まる．この位相を $\mathcal{O}$ により生成される位相という．

the topology generated by $\mathcal{O}$

証明　$\mathcal{U} = \inf\{\mathcal{V}; \mathcal{O} \subset \mathcal{V} \in \mathcal{T}(X)\}$ とおけばよい．　□

$$\mathcal{U} = \bigcap_{\substack{\mathcal{V} \in \mathcal{T}(X) \\ \mathcal{V} \supset \mathcal{O}}} \mathcal{V}$$

系 2.2　X を集合とし，$\{\mathcal{U}_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ を X 上の位相からなる任意の集合とする．このとき $\sup\{\mathcal{U}_\lambda\}$ が存在し，それは任意の $\mathcal{U}_\lambda$ よりも強い位相の中で最弱のものである．

証明　命題 2.3 により $\inf\{\{\mathcal{U}_\lambda\}$ の上界 $\}$ が存在するが，明らかにこれが求める位相となる．　□

$\|$

すべての$\mathcal{U}_\lambda$よりも強い位相の全体からなる族

Ψ

$\mathcal{P}(X)$