Nov. 23, 2021

集合と位相 第二　第14回 距離空間の完備化　補足

定理 2.46 における，F の一葉連続性の証明（補足付き）（教科書 pp. 157–158）
F が一様連続であることを示す．$x^*, y^* \in X^*$ を (2.20) と同じ δ に対して

$$d^*(x^*, y^*) < \frac{1}{3}\delta$$

となるような任意の 2 点とする．さてある Cauchy 列 $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$ が存在して

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad y^* = \lim_{n\to\infty} y_n$$

と表すことができる．このとき，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $n \geq N$ に対して

$$d^*(x^*, x_n) < \frac{1}{3}\delta, \quad d^*(y^*, y_n) < \frac{1}{3}\delta$$

となる．

> $\because$ ある $N_x \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $n \geq N_x$ に対して $d^*(x^*, x_n) < \frac{1}{3}\delta$ であり，
> ある $N_y \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $n \geq N_y$ に対して $d^*(y^*, y_n) < \frac{1}{3}\delta$ なので，
> $N \triangleq \max\{N_x, N_y\}$ とおけばよい．

一方，F の定義より

$$F(x^*) = \lim_{n\to\infty} f(x_n), \quad F(y^*) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$$

であるから，同じ $n \geq N$ に対して

$$d'(F(x^*), f(x_n)) < \varepsilon, \quad d'(F(y^*), f(y_n)) < \varepsilon \tag{2.21}$$

と仮定してよい．

> $\because$ ある $N_x \in \mathbb{N}$ が存在し任意の $n \geq N_x$ に対して $d'(F(x^*), f(x_n)) < \varepsilon$ で
> あり，ある $N_y \in \mathbb{N}$ が存在し任意の $n \geq N_y$ に対して $d'(F(y^*), f(y_n)) < \varepsilon$
> となるから，$\max\{N, N_x, N_y\}$ を改めて N とすればよい．

このとき

$$d(x_n, y_n) = d^*(x_n, y_n) \leq d^*(x_n, x^*) + d^*(x^*, y^*) + d^*(y^*, y_n) < \delta$$

となるから，(2.20), (2.21) により

$$d'(F(x^*), F(y^*)) \leq d'(F(x^*), f(x_n)) + d'(f(x_n), f(y_n)) + d'(f(y_n), F(y^*)) < 3\varepsilon$$

となる．したがって F は確かに一様連続である．　□

定義 2.50 (1) における言明（教科書 p. 158）
(i) 等長写像は一様連続な単射である．
(ii) $f\colon X \to Y$ が等長写像のとき，X と $f(X)$ は同相となる．
証明．(i) 一様連続性は，一様連続性の定義（教科書 定義 2.46 pp. 144–145）と等長写像の定義から明らか．単射性も等長写像の定義から明らか．
(ii) 逆写像 $f^{-1}\colon f(X) \to X$ について，$d'(y, y') = d(f^{-1}(y), f^{-1}(y'))$ が成立するから，f^{-1} も等長写像なので（一様）連続である．よって $f\colon X \to f(X)$ は同相写像である．

補足 完備性は位相的性質ではない，すなわち同相写像によって保存されないが (教科書 pp. 152–153)，等長同型写像によって保存される（有界性や全有界性も位相的性質ではないが，等長同型写像によって保存される）．

なお，位相構造と距離構造の中間に位置する一様構造という概念があり，一様構造をもつ空間（一様空間）に関して完備性が定義される．

定理 2.47 完備化の一意性 (X, d) を距離空間，(X^*, d^*) を (X, d) の完備化 —— $X \subset X^*$ と見做す——，(Y, d') を完備距離空間，$f\colon X \to Y$ を等長写像とし，$f(X)$ が Y の中で稠密であるとする．このとき，等長全射（等長同型写像）$F\colon X^* \to Y$ で f の拡張となるもの，すなわち $F \restriction X = f$ であるものが一意的に存在する．

注 1 定理 2.47 の (X^*, d^*) は，定理 2.45 の証明で構成された具体的な完備化 (X^*, d^*) に限定されず，それを含む，定理 2.45 の完備化の条件 1), 2), 3) を満たす一般抽象的な完備距離空間である．

注 2 定理 2.47 の (Y, d') も (X, d) の完備化の条件 1), 2), 3) をを満たす（f が ι に対応している）．したがって定理 2.47 は，1 つの距離空間 (X, d) の完備化が 2 つ —— (X^*, d^*) と (Y, d') —— あったときに，それらが距離空間として同じもの（等長同型）であることを主張している．

定理 2.47 の証明（補足付き） 等長写像は一様連続であるから，f の拡張となるような F の一意的存在は定理 2.46（教科書 p. 156）から従う．そこで，まず F が等長写像であることを示す．X^* の 2 点 x^*, y^* がそれぞれ X の Cauchy 列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ により，

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad y^* = \lim_{n\to\infty} y_n$$

と表わされているものとする．F は連続で f の拡張だから，

$$F(x^*) = F\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n),$$
$$F(y^*) = F\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) = \lim_{n\to\infty} F(y_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$$

となる．したがって

$$d'(F(x^*), F(y^*)) = \lim_{n\to\infty} d'(f(x_n), f(y_n)).$$

$\because$

$$d'(F(x^*), F(y^*)) \leq d'(F(x^*), f(x_n)) + d'(f(x_n), f(y_n)) + d'(f(y_n), F(y^*)),$$
$$d'(f(x_n), f(y_n)) \leq d'(f(x_n), F(x^*)) + d'(F(x^*), F(y^*)) + d'(F(y^*), f(y_n))$$

から

$$|d'(F(x^*), F(y^*)) - d'(f(x_n), f(y_n))| \leq d'(F(x^*), f(x_n)) + d'(F(y^*), f(y_n))$$

であって，

$$\lim_{n\to\infty} d'(F(x^*), f(x_n)) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} d'(F(y^*), f(y_n)) = 0$$

より上式が従う．

続けて変形すると

$$\begin{aligned} d'(F(x^*), F(y^*)) &= \lim_{n\to\infty} d'(f(x_n), f(y_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d^*(x^*, y^*) \end{aligned}$$

（最後の等号は，上に示した最初の等号と同様に導くことができる）となるから，F は等長写像である．

次に F が全射であることを示す．定理の仮定から $\overline{f(X)} = Y$ かつ f は等長写像であるから，任意の $y \in Y$ に対し X の Cauchy 列 $\{x_n\}$ で

$$y = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \tag{‡}$$

なるものが存在する．

$\because$ 定理 2.38 (教科書 p. 146) より (‡) を満たす Y の点列 $\{f(x_n)\}$ が存在する．$\{f(x_n)\}$ は収束列だから Cauchy 列なので，f が等長写像であることから，$\{x_n\}$ も Cauchy 列である．

そこで $\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \in X^*$ とおけば，F は連続で f の拡張だから

$$F(x^*) = F\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$$

となる．したがって，F は全射であり証明が終わる． $\square$