集合と位相第二

第13回　距離空間の完備性

2.6.1　距離空間の位相

繰り返しになるが，まず距離空間の位相について確認しておこう．(X, d) を距離空間とする．X 上の点 x と正数 $\varepsilon > 0$ に対し

$$U(x, \varepsilon) = \{y \in X; d(y, x) < \varepsilon\}$$

を x を中心とした半径 ε の**開球体**と呼び，開球体の全体

$$\{U(x, \varepsilon); x \in X, \varepsilon > 0\}$$

を開集合系の基とする X 上の位相を d の定める位相というのであった．

$\mathcal{U}$ が距離 d の定める位相（距離位相）

$\Leftrightarrow \{U(x, \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ が $\mathcal{U}$ の開基

$\Leftrightarrow \forall x \in X; \{U(x, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ が x の基本近傍系

2.6.1　距離空間の位相

繰り返しになるが，まず距離空間の位相について確認しておこう．(X, d) を距離空間とする．X 上の点 x と正数 $\varepsilon > 0$ に対し

$$U(x, \varepsilon) = \{y \in X; d(y, x) < \varepsilon\}$$

を x を中心とした半径 ε の開球体と呼び，開球体の全体

$$\{U(x, \varepsilon); x \in X, \varepsilon > 0\}$$

を開集合系の基とする X 上の位相を d の定める位相というのであった．たとえば，任意の集合 X に対し，その上の距離関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ を

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & (x = y) \\ 1 & (x \neq y) \end{cases}$$

離散距離位相

と定義すれば，これの定める X 上の位相は離散位相となることがわかる．

命題2.17の証明

d_1 と d_2 の定める開集合系をそれぞれ $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ とおく.

まず, $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$ と仮定し,

$x \in X$ と $\varepsilon > 0$ を任意に固定する.

$U_2(x, \varepsilon) \in \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_1$ より,

ある $\delta_1 > 0$ が存在して $U_1(x, \delta_1) \subset U_2(x, \varepsilon)$ とできる.

$U_1(x, \varepsilon) \in \mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$ より同様に,

ある $\delta_2 > 0$ が存在して $U_2(x, \delta_2) \subset U_1(x, \varepsilon)$ とできる.

$\delta \triangleq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおけば,

$U_1(x, \delta) \subset U_1(x, \delta_1) \subset U_2(x, \varepsilon)$, $U_2(x, \delta) \subset U_2(x, \delta_2) \subset U_1(x, \varepsilon)$

となる.

(次のスライドに続く)

命題2.17の証明の続き

次に十分性を示す.

$x \in U \in \mathcal{U}_1$ とすると, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $U_1(x, \varepsilon) \subset U$ となる.

仮定より, ある $\delta > 0$ が存在して $U_2(x, \delta) \subset U_1(x, \varepsilon) \subset U$ となる.

よって, $U \in \mathcal{U}_2$ となるので, $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$ である.

仮定より同様に, $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$ も言えるので, $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$ である.

(Q.E.D.)

pp. 144–145

距離空間の間の写像に関しては，連続性よりも強い一様連続性と呼ばれる重要な性質がある．

定義 2.46　X, Y を距離空間とする．写像 $f : X \to Y$ は，任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して

~~$d(x, x') < \delta \ (x, x' \in X) \Rightarrow d'(f(x), f(x')) < \varepsilon$~~

$$\forall x, x' \in X \, [d(x, x') < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x')) < \varepsilon]$$

となるとき，**一様連続**（uniformly continuous）であるという．ただし，d, d' はそれぞれ X, Y の距離を表す．

定理 2.36　二つの距離空間 X, Y の間の写像 $f : X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は，任意の点 $x \in X$ と任意の正数 ε に対し，ある $\delta > 0$ が存在して

$$f(U(x,\delta)) \subset U(f(x),\varepsilon)$$

$$\Updownarrow$$

となることである．

任意の$x' \in X$ について

$$d(x,x') < \delta \Rightarrow d(f(x),f(x')) < \varepsilon$$

$$f : (X,d) \to (Y,d') \text{が連続}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x' \in X;$$

$$[d(x,x') < \delta \Rightarrow d'(f(x),f(x')) < \varepsilon]$$

定義から明らかに一様連続な写像は連続である.

$f:(X,d)\to(Y,d')$ が一様連続

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,x'\in X;$

$[d(x,x')<\delta \Rightarrow d'(f(x),f(x'))<\varepsilon]$

$\Downarrow$

$f:(X,d)\to(Y,d')$ が連続

$\Leftrightarrow \forall x\in X,\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x'\in X;$

$[d(x,x')<\delta \Rightarrow d'(f(x),f(x'))<\varepsilon]$

定義から明らかに一様連続な写像は連続である．しかし，つぎの簡単な例が示すように逆は成り立たない．

例 2.23 $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 $f(x) = x^2$ は一様連続ではない．これは $f(x) - f(y) = (x^2 - y^2) = (x - y)(x + y)$ から直ちにわかる．

$\because$ $\varepsilon > 0$に対し，どんな$\delta > 0$についても，

$\left|x\right| \geq \frac{\varepsilon}{\delta} + \frac{\delta}{4}, y \triangleq x + \frac{\delta}{2}$とすれば，

$\left|x - y\right| = \frac{\delta}{2} < \delta$かつ

$$\left|f(x) - f(y)\right| = \left|x^2 - y^2\right| = \left|x - y\right| \cdot \left|x + y\right|$$

$$= \frac{\delta}{2} \cdot \left|2x + \frac{\delta}{2}\right| = \delta \left|x + \frac{\delta}{4}\right| \geq \delta \cdot \frac{\varepsilon}{\delta} = \varepsilon$$

2.6.2　距離空間の完備性

(X, d) を距離空間とする．自然数の集合 $\mathbb{N}$ によって添え字付けられた X の点の列

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

sequence (of points)

を X の点列という．点列のことを簡単に $\{x_n\}$ と記す場合もある．

定義 2.47　距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は，ある点 $x \in X$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$$

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converges to x

となるとき，x に収束するといい

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{または} \quad x_n \longrightarrow x$$

limit (point)

と書く．点 x を極限（点）という．

p. 146

距離空間においては，部分集合の閉包や写像の連続性を点列の収束の概念によって簡明に述べることができる．たとえば，つぎの二つの定理が成立する．

定理 2.38　X を距離空間，$A \subset X$ をその部分集合とする．このとき $x \in X$ が A の触点である，すなわち $x \in \bar{A}$ となるための必要十分条件は

$$A \text{ の点列 } \{a_n\} \text{ が存在して } \lim_{n\to\infty} a_n = x$$

となることである．

p. 147

定理 2.39　X, Y を距離空間とする．このとき，写像 $f : X \longrightarrow Y$ が連続であるための必要十分条件は，収束する X の任意の点列 $\{x_n\}$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \quad (x = \lim_{n\to\infty} x_n)$$

となることである．　$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$

定理 2.38　X を距離空間，$A \subset X$ をその部分集合とする．このとき $x \in X$ が A の触点である，すなわち $x \in \bar{A}$ となるための必要十分条件は

$$A \text{ の点列 } \{a_n\} \text{ が存在して } \lim_{n\to\infty} a_n = x$$

となることである．

（可算）選択公理

証明　$x \in \bar{A}$ とすれば，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $U(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$ となる．そこで $a_n \in U(x, \frac{1}{n}) \cap A$ となる点 a_n をとれば $a_n \longrightarrow x$ となる．

逆に $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ となる A の点列 $\{a_n\}$ が存在したとする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対し n を充分大きくとれば $d(a_n, x) < \varepsilon$ となる．したがって，$U(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ となり $x \in \bar{A}$ が得られる．　□

定義 2.48　距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}$ は

任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある N が存在して

$m, n \geq N$ となるすべての m, n に対し $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ となる

という条件が満たされるとき**コーシー列**（Cauchy sequence）という．基本列と呼ぶ場合もある．

fundamental sequence

number sequence
numerical sequence
sequence of numbers

p. 148

例 2.24 $\mathbb{R}$ の点列はふつう数列と呼ばれる．数列 $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ は明らかにコーシー列ではない．一方，数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ は 0 に収束するからコーシー列である．つぎに，$\sqrt{2}$ の無限小数による表示 $1.4142\cdots$ の有限小数部分を用いて

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1.4, \quad a_3 = 1.41, \cdots$$

により定義される数列 $\{a_n\}$ を考えよう．この数列は明らかに $\sqrt{2}$ に収束するのでコーシー列である．一方，この数列の各項は有理数であるから，それは有理数全体のなす距離空間 $\mathbb{Q}$ の中のコーシー列である．ところが，よく知られているように $\sqrt{2}$ は有理数ではない．したがって，このコーシー列は $\mathbb{Q}$ の中では収束しないことになる．

一方，上記の ε とそれに対応する N をとるとき，任意の $n \geq N$ に対して

$$a_n \leq x_n \leq b_n \quad \text{かつ} \quad b_n - x_n \leq \varepsilon$$

となり，さらに

$$b_n - a_n \leq \varepsilon$$

となる．これから $a = b$ となることがわかり，また任意の $n \geq N$ に対して

$$|x_n - a| \leq \varepsilon$$

となる．こうして $\{x_n\}$ が（a に）収束することが示された． □

一方，上記の ε とそれに対応する N をとるとき，

$$b-a \le b_N - a_N = \sup_{n\ge N} x_n - \inf_{n\ge N} x_n = \sup_{m,n\ge N} |x_m - x_n| \le \varepsilon$$

となる．これから $a=b$ となることがわかり，また任意の $n \ge N$ に対して

$$|x_n - a| = \max\{x_n - a, b - x_n\} \le \max\{x_n - a_N, b_N - x_n\} = \max\left\{x_n - \inf_{m\ge N} x_m, \sup_{m\ge N} x_m - x_n\right\}$$

$$= \max\left\{\sup_{m\ge N}(x_n - x_m), \sup_{m\ge N}(x_m - x_n)\right\} = \sup_{m\ge N} |x_n - x_m| \le \varepsilon$$

となる．こうして $\{x_n\}$ が（a に）収束することが示された． □

さて，もとに戻って定理 2.40 をもとにつぎのように定義する．

定義 2.49　距離空間は，そのすべてのコーシー列が収束するとき完備であるという．

complete

$\mathbb{R}$ は完備であるが，それと同相な開区間 $(0,1)$ は明らかに完備ではない．

たとえば，Cauchy列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ を考えればよい．

pp. 160–161

定義 2.51　X を距離空間とする．X の部分集合 $A \subset X$ は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して X の有限個の ε–開球体で覆えるとき，**全有界**（totally bounded）という．とくに X 自身がこの条件を満たすとき，X を全有界な距離空間という．

命題 X を距離空間，$A \subset B \subset X$ とするとき，

B が全有界 $\Rightarrow$ A も全有界

証明 定義から明らか．

pp. 160–161

定義 2.51　X を距離空間とする．X の部分集合 $A \subset X$ は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して X の有限個の ε–開球体で覆えるとき，**全有界**（totally bounded）という．とくに X 自身がこの条件を満たすとき，X を全有界な距離空間という．

コンパクトな距離空間は全有界である．

また，距離空間 X の部分集合 A が全有界ならば，それは有界である．

∵ Aが全有界ならば，$\varepsilon > 0$に対して

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U(a_i, \varepsilon) \qquad (2.22)$$

が成り立つ．

$d \triangleq \max\{d(a_i, a_j) \mid i, j \in [n]\}$　　（ここで $[n] \triangleq \{1, 2, \ldots, n\}$）

とおく．任意の $x, y \in A$ に対して $x \in U(a_i, \varepsilon), y \in U(a_j, \varepsilon)$ なる $i, j \in [n]$ が存在するから

$$d(x, y) \leq d(x, a_i) + d(a_i, a_j) + d(a_j, y) < \varepsilon + d + \varepsilon$$

となるので，$\operatorname{diam} A \leq d + 2\varepsilon < \infty$ より A は有界である．

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A については，逆に A が有界ならば全有界となることが簡単にわかる．

補題 (X,d) を距離空間，$A \subset X$ とするとき，$\operatorname{diam} \overline{A} = \operatorname{diam} A$.

証明 $A \subset \overline{A}$ より $\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} \overline{A}$ なので，逆向きの不等号を示す．
任意に $\varepsilon > 0$ を固定する．任意の $x, y \in \overline{A}$ に対して，触点の定義より $d(x,a) < \varepsilon, d(y,b) < \varepsilon$ なる $a, b \in A$ が存在するので，

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y) \leq \varepsilon + \operatorname{diam} A + \varepsilon$$

より，

$$\operatorname{diam} \overline{A} \leq \operatorname{diam} A + 2\varepsilon$$

となり，$\varepsilon > 0$ の任意性から $\operatorname{diam} \overline{A} = \operatorname{diam} A$ となる．(Q.E.D.)

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A については，逆に A が有界ならば全有界となることが簡単にわかる．

証明 A が有界であるとすると，先の補題から $\overline{A}$ も有界となる．
$\overline{A}$ はEuclid空間 $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合なのでコンパクトであり，
距離空間におけるコンパクト集合は全有界だから，
$\overline{A}$ は全有界であり，$A \subset \overline{A}$ から A も全有界となる．(Q.E.D.)

pp. 160–161

定義 2.51　X を距離空間とする．X の部分集合 $A \subset X$ は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して X の有限個の ε–開球体で覆えるとき，全有界（totally bounded）という．とくに X 自身がこの条件を満たすとき，X を全有界な距離空間という．

注 全有界性は位相的性質ではない.

∵ 例えば, $]0,1[$ と $\mathbb{R}$ は同相だが,
$]0,1[$ は全有界であり, $\mathbb{R}$ は全有界ではない.

pp. 161–162

定理 2.48　全有界な距離空間は第 2 可算公理を満たす.

証明　命題 2.12 により，全有界な距離空間 X は可分であることを示せばよい.
定義から，任意の n に対して有限個の点 $x_i^{(n)}$ $(i = 1, \cdots, i_n)$ が存在して

$$X = \bigcup_{i=1}^{i_n} U\left(x_i^{(n)}, \frac{1}{n}\right)$$

となる．そこで

$$A = \{x_i^{(n)}; n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq i_n\}$$

とおけばこれは可算集合であるが，$\bar{A} = X$ となる．なぜならば，任意の $x \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ なる $n \in \mathbb{N}$ をとれば，(*) より $x \in U\left(x_i^{(n)}, \frac{1}{n}\right)$ なる $x_i^{(n)} \in A$ が存在するので，$a \triangleq x_i^{(n)}$ とおけば $d(x, a) < \varepsilon$ となるからである.
したがって，X は可分である.

（可算）選択公理

p. 162

定義 2.52　X を一般の位相空間とし $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をその点列とする．もしある点 $x \in X$ が存在して，その点の任意の近傍 U に対して充分大きな n をとれば $x_n \in U$ となるとき，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は x に**収束**するという．

距離空間に対しては，上記の定義と前に与えた定義 2.47 とは明らかに一致する．

(定義2.47 $\Rightarrow$ 定義2.52) U を x の近傍とすると，
$U(x,\varepsilon) \subset U$ なる $\varepsilon > 0$ が存在する．$\lim_{n\to\infty} d(x,x_n) = 0$ より，
ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し任意の $n \geq N$ について $d(x,x_n) < \varepsilon$ とできるので，$x_n \in U(x,\varepsilon) \subset U$ となる．

p. 145

定義 2.47　距離空間 (X,d) の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は，ある点 $x \in X$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} d(x,x_n) = 0$$

となるとき，x に**収束**するといい

p. 162

定義 2.52　X を一般の位相空間とし $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をその点列とする．もしある点 $x \in X$ が存在して，その点の任意の近傍 U に対して充分大きな n をとれば $x_n \in U$ となるとき，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は x に**収束**するという．

距離空間に対しては，上記の定義と前に与えた定義 2.47 とは明らかに一致する．

(定義2.52 $\Rightarrow$ 定義2.47) $U(x,\varepsilon)$はxの近傍なので，
任意の$\varepsilon > 0$に対して，ある$N \in \mathbb{N}$が存在し
任意の$n \geq N$について$x_n \in U(x,\varepsilon)$，すなわち
$d(x,x_n) < \varepsilon$となる．以上から$\lim_{n\to\infty} d(x,x_n) = 0$である．

p. 145

定義 2.47　距離空間 (X,d) の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は，ある点 $x \in X$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} d(x,x_n) = 0$$

となるとき，x に**収束**するといい

定義 2.52　X を一般の位相空間とし $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をその点列とする．もしある点 $x \in X$ が存在して，その点の任意の近傍 U に対して充分大きな n をとれば $x_n \in U$ となるとき，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は x に**収束**するという．

距離空間に対しては，上記の定義と前に与えた定義 2.47 とは明らかに一致する．また X がハウスドルフ空間ならば，収束する点列の極限は一意的に定まることがわかる．

背理法による．X をHausdorff空間とし，
$\{x_n\} \subset X, x_n \to x \in X, x_n \to y \in X, x \neq y$ とする．
X はHausdorff空間なので，$U \cap V = \varnothing$ なる
x の開近傍 U と y の開近傍 V が存在する．
$x_n \to x$ より，ある $N_x \in \mathbb{N}$ が存在し，任意の $n \geq N_x$ について $x_n \in U$ となる．
$x_n \to y$ より，ある $N_y \in \mathbb{N}$ が存在し，任意の $n \geq N_y$ について $x_n \in V$ となる．
$N \triangleq \max\{N_x, N_y\}$ とおくと，$x_N \in U$ かつ $x_N \in V$ となり，$U \cap V = \varnothing$ に反する．

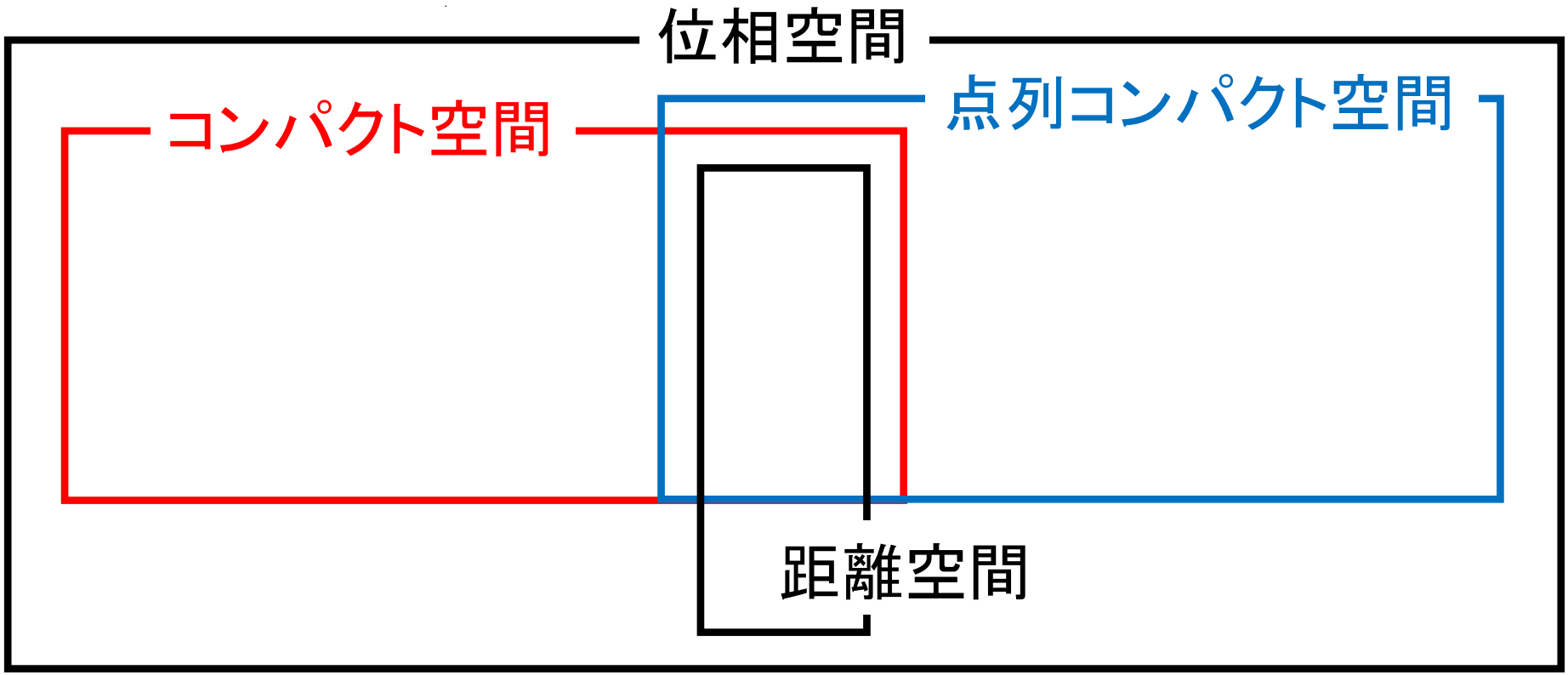
定義 2.52　X を一般の位相空間とし $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をその点列とする．もしある点 $x \in X$ が存在して，その点の任意の近傍 U に対して充分大きな n をとれば $x_n \in U$ となるとき，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は x に**収束**するという．

距離空間に対しては，上記の定義と前に与えた定義 2.47 とは明らかに一致する．また X がハウスドルフ空間ならば，収束する点列の極限は一意的に定まることがわかる．点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$k_1 < k_2 < \cdots$ を満たすような任意の点列 $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ をもとの点列の**部分列**という．

subsequence

定義 2.53 X を位相空間とする．X の任意の点列が収束する部分列をもつとき X は**点列コンパクト**（sequencially compact）という．

定理 2.50 距離空間に対しては，コンパクトであることと点列コンパクトであることとは同値な条件である．



定理 2.50　距離空間に対しては，コンパクトであることと点列コンパクトであることとは同値な条件である．

証明　X をコンパクトな距離空間とし，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をその点列とする．任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$S_n = \{x_n, x_{n+1}, \cdots\} \subset X$$

とおく．このとき，X の部分集合族 $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は明らかに有限交叉性をもつ．

$\because$ $S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots, S_{n_k} \in \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，

$\bigcap_{i=1}^{k} S_{n_i} = S_n \neq \varnothing$ (ただし，$n \triangleq \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$) である．

仮

定により X はコンパクトであるから，定理 2.27 により

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{S_n} \neq \emptyset$$

となる．そこでこの集合から 1 点 x を選ぶ．このとき，任意の n に対して

（可算）選択公理

$$d(x, x_{k_n}) < \frac{1}{n}$$

となるような k_n を選ぶことができる．さらに，$k_1 < k_2 < \cdots$ となるようにできる．

$\because$ $x \in \overline{S_1}$ より $d(x, x_{k_1}) < 1$ なる $x_{k_1} \in S_1$ が存在する．

$x \in \overline{S_{k_1+1}}$ より $d(x, x_{k_2}) < \frac{1}{2}$ なる $x_{k_2} \in S_{k_1+1}$ が存在する．

$x \in \overline{S_{k_2+1}}$ より $d(x, x_{k_3}) < \frac{1}{3}$ なる $x_{k_3} \in S_{k_2+1}$ が存在する．

以下同様．

p. 164

$$F_n = X - (U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n)$$

は X の空でない閉集合である．そこで $x_n \in F_n$ を選べば，点列 $\{x_n\}$ が得られる．X は点列コンパクトであるから，$\{x_n\}$ は収束する部分列をもつ．その極限を x とすれば，明らかに任意の n に対し $x \in F_n$ となる．

$\because$ $\{F_n\}$は単調減少列なので，

各 $n \in \mathbb{N}$について，ある $N \in \mathbb{N}$が存在し，

任意の $m \geq N$ に対して $F_{k_m} \subset F_n$ ゆえ，

$\{x_{k_N}, x_{k_{N+1}}, \ldots\} \subset F_n$ となるので，

$x_{k_m} \to x \ (m \to \infty)$であることと

F_n が閉集合であることから $x \in F_n$ となる．

pp. 164–165

定理 2.49 の証明　X をコンパクトな距離空間とする．このとき，X が全有界となることはすでに見た．X が完備となることを示そう．定理 2.50 により X は点列コンパクトであるから，X の任意のコーシー列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する部分列をもつ．このとき，コーシー列の定義から容易に $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 自身が収束することがわかる．したがって，X は完備である．

補題 Cauchy列が収束する部分列を持てば，
元のCauchy列自身も収束する.

補題 Cauchy列が収束する部分列を持てば,
元のCauchy列自身も収束する.

証明 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をCauchy列, $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を収束部分列とし,
$\{x_{k_n}\}$ の極限点を x とする. 任意に $\varepsilon > 0$ を固定する.
$x_{k_n} \to x$ より, ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在し,
任意の $n \geq N_1$ について $d(x, x_{k_n}) < \frac{\varepsilon}{2}$ となる.
$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はCauchy列なので, ある $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在し,
任意の $m, n \geq N_2$ について $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ となる.
ここで, $N \triangleq \max\{k_{N_1}, N_2\}$ とおけば, 任意の $n \geq N$ に対して

$$d(x, x_n) \leq d\left(x, x_{k_{N_1}}\right) + d\left(x_{k_{N_1}}, x_n\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

したがって, $x_n \to x$.

さて $y_n = x_n^{(n)}$ とおけば $\{y_n\}$ は $\{x_n\}$ の部分列であり，任意の n に対して $y_n, y_{n+1}, \cdots$ はすべてある $\frac{1}{n}$–開球体に属することになる．このことから容易に $\{y_n\}$ がコーシー列となることがわかる．

$\because$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$N \geq \frac{2}{\varepsilon}$ なる $N \in \mathbb{N}$ を取れば，

任意の $m, n \geq N$ について，

y_m, y_n はある $\frac{1}{N}$-開球体に属するので，

$$d(y_m, y_n) < 2\frac{1}{N} \leq \varepsilon$$