

集合と位相 第二 第12回 コンパクト空間の性質 補足

本資料中の強局所コンパクト性に関する内容は、試験には出題されない。

定義 2.45 X を位相空間とする。

- 1) $A \subset X$ が**相対コンパクト** (relatively compact) $\iff \bar{A}$ がコンパクト。
- 2) X が**局所コンパクト** (locally compact)
 \iff 任意の点 $x \in X$ が少なくとも一つのコンパクトな近傍をもつ。

定義 X を位相空間とする。

X が**強局所コンパクト** (strongly locally compact)
 \iff 任意の点 $x \in X$ が少なくとも一つの相対コンパクトな近傍をもつ。

命題

- 1) 強局所コンパクト \implies 局所コンパクト。
- 2) Hausdorff 空間ににおいて,
 強局所コンパクト \iff 局所コンパクト。

証明. 1) 定義から明らか。

2) Hausdorff 空間 X が局所コンパクトだとすると、任意の $x \in X$ はコンパクトな近傍 K をもち、Hausdorff 空間ににおいてコンパクト集合 K は閉集合なので（教科書 p. 135, 定理 2.29）， $\bar{K} = K$ だから、 K は x の相対コンパクトな近傍でもある。よって、 X は強局所コンパクトである。（Q.E.D.）

次の例から判るように、一般に、局所コンパクト $\not\implies$ 強局所コンパクト である（したがって、教科書 p. 138, 定義 2.45 にある局所コンパクト性に関する記述は誤り）。

例 X を無限集合、 $p \in X$ 、 $\mathcal{U} \triangleq \{\emptyset\} \cup \{U \mid p \in U\}$ とすると、 \mathcal{U} は X の開集合系になる。任意の $x \in X$ について $\{x, p\}$ は x のコンパクトな近傍だから、 X は局所コンパクトである。一方、任意の非空開集合の閉包は全体集合 X であり、 X はコンパクトでないから、 X は強局所コンパクトではない。なお、 X がコンパクトでないことは、開被覆 $\{\{x, p\} \mid x \in X\}$ を考えれば、 X が無限集合であることから分かる。