集合と位相第二

第11回　コンパクト性

2.5.2 コンパクト性

この項では位相空間の最も重要な性質の一つであるコンパクト性について解説する．

定義 2.42 X を位相空間とする．X の部分集合の族

$$\mathcal{M} = \{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \quad (M_\lambda \subset X)$$

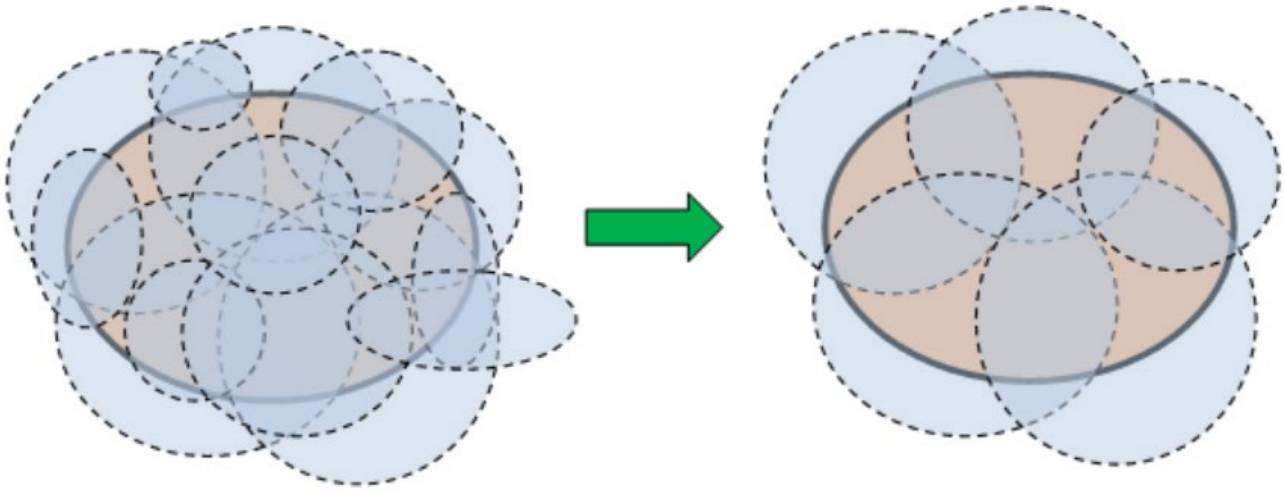
cover open cover

はその和集合が X 全体となるとき，すなわち $X = \cup_\lambda M_\lambda$ となるとき X の被覆（covering）という．すべての M_λ が開集合のとき $\mathcal{M}$ を開被覆（open covering）といい，またすべての M_λ が閉集合のとき $\mathcal{M}$ を閉被覆という．さらに添え字の集合 Λ が有限の場合 $\mathcal{M}$ を有限被覆という．finite covering / finite cover

$\mathcal{M} = \{M_\lambda\}, \mathcal{N} = \{N_\mu\}$ を X の二つの被覆とする．もし第 2 の被覆に属する任意の N_μ が，第 1 の被覆に属するある M_λ の部分集合となっているとき，$\mathcal{N}$ は $\mathcal{M}$ の細分（refinement）という．とくに $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ の場合は $\mathcal{N}$ は $\mathcal{M}$ の部分被覆という． subcovering / subcover

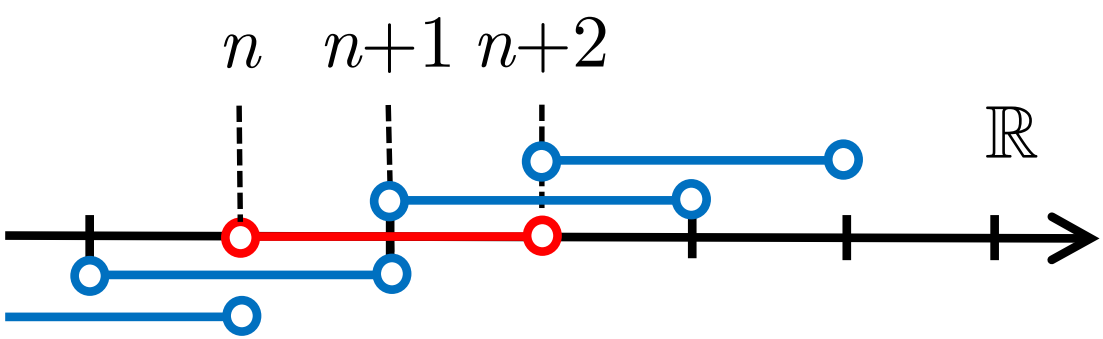
連結性と同様に，コンパクト性もまた位相的な性質であることが定義から直ちにわかる．すなわち，互いに同相な位相空間の一方がコンパクトならば，他方もコンパクトである．

X の部分集合 A は，相対位相に関してコンパクトとなるとき X のコンパクトな部分集合という．X の部分集合の族 $\{M_\lambda\}_\lambda$ はその和集合が A を含むとき A の（X における）被覆という．このとき相対位相の定義から直ちにわかるように，A がコンパクトとなるための必要十分条件は A の（X における）任意の開被覆が有限部分被覆をもつことである．



例 2.21 (1) $\mathbb{R}$ はコンパクトではない．なぜならば $\{(n, n+2); n \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{R}$ の開被覆であるが，それに属する有限個の開集合をどんなに選んでも $\mathbb{R}$ を被覆することはできないからである．

(2) 任意の有界閉区間 $[a, b]$ はコンパクトである（この事実は，ハイネ–ボレルの被覆定理と呼ばれる）．



例 2.21 (1) $\mathbb{R}$ はコンパクトではない．なぜならば $\{(n, n+2); n \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{R}$ の開被覆であるが，それに属する有限個の開集合をどんなに選んでも $\mathbb{R}$ を被覆することはできないからである．

(2) 任意の有界閉区間 $[a, b]$ はコンパクトである（この事実は，ハイネ–ボレルの被覆定理と呼ばれる）．

the Heine-Borel Covering Theorem

証明 任意の有界閉区間は単位閉区間 $I = [0,1]$ と同相なので，
I がコンパクトであることを示せばよい．
$\mathcal{M} = \{M_\lambda\}$ を I の任意の開被覆とするとき，
I は有限個の M_λ により被覆されることを示す．
被覆の定義により，ある λ_1 に対して $0 \in M_{\lambda_1}$ となる．
M_{λ_1} は開集合であって，
$\{[0, a[\mid 0 < a < 1\}$ は部分空間 I における点 0 の基本近傍系だから，
ある $0 < a_1 < 1$ が存在して $[0, a_1[\subset M_{\lambda_1}$ となる．

（次のスライドに続く）

（証明の続き）次に,

$$A \triangleq \{a \mid 0 < a < 1, [0, a[\text{ は有限個の } M_\lambda \text{ で覆える}\}$$

とおくと，直前のスライドでの議論から $a_1 \in A$ なので，$A \neq \varnothing$ である.
そこで，$b \triangleq \sup A$ とおく.
$b \in I$ であって, $\{M_\lambda\}$ は I の被覆だから，$b \in M_\mu$ なる M_μ が存在する.
M_μ は開集合であって,
$\{]b'', b'''[\cap I \mid b'' < b < b'''\}$ は部分空間 I における点 b の基本近傍系だから,
$b \in]b'', b'''[\cap I \subset M_\mu$ なる b'', b''' が存在する.
b の定義から $[0, b'[$ が有限個の M_λ で覆われるような,
$b'' < b' \leq b$ なる b' が存在する.
このとき, $[0, b'[\cup (]b'', b'''[\cap I) = [0, b'''[\cap I$ は有限個の M_λ で覆われる.
もし $b''' \leq 1$ だとすると, $[0, b'''[\cap I = [0, b'''[$ より $b''' \in A$ なので,
b の定義から $b''' \leq b$ となり，$b < b'''$ に矛盾する.
よって $b''' > 1$ となるが，このとき
有限個の M_λ で覆われていた $[0, b'''[\cap I$ は I に一致する.
(Q.E.D.)

例2.21 の続き

(3) 簡単にわかるように

$$\text{離散な位相空間 } X \text{ がコンパクト} \iff X \text{ は有限集合}$$

となる.

証明 ($\Leftarrow$) コンパクト性の定義から明らか.

($\Rightarrow$) 開被覆 $\{\{x\} \mid x \in X\}$ を考えれば明らか.

(Q.E.D.)

pp. 130–131　コンパクトな位相空間の連続写像による像はコンパクトである．すなわち，つぎの定理が成立する．

定理 2.26　X をコンパクトな位相空間とし $f : X \to Y$ を X から位相空間 Y への連続写像とする．このとき $f(X)$ はコンパクトである．

証明　$\{U_\lambda\}_\lambda$ を Y の開集合の族で $f(X)$ を覆うものとする．すなわち

$$f(X) \subset \bigcup_\lambda U_\lambda$$

とする．このとき $\{f^{-1}(U_\lambda)\}_\lambda$ は X の開被覆となる．

$\because$ f の連続性から各 $f^{-1}(U_\lambda)$ は X の開集合であり，

$$\bigcup_\lambda f^{-1}(U_\lambda) = f^{-1}\left(\bigcup_\lambda U_\lambda\right) \supset f^{-1}(f(X)) \supset X.$$

$$\because\ f(X) = f\left(\bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}\left(U_{\lambda_i}\right)\right) = \bigcup_{i=1}^{k} f\left(f^{-1}\left(U_{\lambda_i}\right)\right) \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\lambda_i}$$

$$\bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(U_{\lambda_i}) = X$$

となる．このとき

$$f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\lambda_i}$$

となる．したがって $f(X)$ はコンパクトである． $\square$

コンパクト性の定義は開集合の言葉で与えられた．しかし，閉集合によって記述することもできる．そのために言葉を一つ用意する．

定義 2.44 X を位相空間とする．X の部分集合の族 $\mathcal{M} = \{M_\lambda\}_\lambda$ は，それに属する任意の有限個の部分集合の共通部分が必ず空でないとき，**有限交叉性**（finite intersection property）をもつという．

FIP

定理 2.27 位相空間 X がコンパクトであるための必要十分条件は，有限交叉性をもつ任意の閉集合の族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$$

となることである．あるいはまた，有限交叉性をもつ任意の部分集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda} \neq \emptyset$$

となることである，といっても同値な条件となる．

つぎの定理は，コンパクト性に関わる最も重要な定理である．

Tychonoff / Tikhonov

定理 2.28 チコノフの定理 $\{X_\lambda\}_\lambda$ を位相空間の族とし $X = \Pi_\lambda X_\lambda$ をその直積とする．このとき X がコンパクトとなるための必要十分条件は X_λ がすべてコンパクトであることである．

極大元 $\tilde{\mathcal{A}} \in \Phi$ が存在する．証明すべきことは $I(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ であるが，明らかに $I(\mathcal{A}) \supset I(\tilde{\mathcal{A}})$ となるから $I(\tilde{\mathcal{A}}) \neq \emptyset$ を示せば充分である．そこで $\mathcal{A} \in \Phi$ を任意の極大元とする．極大性から

1) $B \subset X$ かつすべての $A \in \mathcal{A}$ に対して $A \cap B \neq \emptyset \;\Rightarrow\; B \in \mathcal{A}$

2) $A_1, \cdots, A_k \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A_1 \cap \cdots \cap A_k \in \mathcal{A}$

となることがわかる．

2) の証明

$$\mathcal{A}' \triangleq \left\{ \bigcap_{i=1}^{k} A_i \;\middle|\; k \in \mathbb{N}, \{A_i\}_{i=1}^{k} \subset \mathcal{A} \right\}$$

とおくと，$\mathcal{A}$が有限交叉性をもつので$\mathcal{A}'$も有限交叉性をもち，$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ である．したがって，$\mathcal{A}$の極大性から $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$.

1) の証明

$\mathcal{A}'' \triangleq \mathcal{A} \cup \{B\}$ とおくと，B についての仮定と 2)より $\mathcal{A}''$ も有限交叉性をもつ．したがって，$\mathcal{A}$の極大性から $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$.

さて各 λ に対して X_λ への射影 $p_\lambda : X \to X_\lambda$ を考える．

このとき

$$\{p_\lambda(A)\}_{A \in \mathcal{A}}$$

は有限交叉性をもつ X_λ の部分集合の族となる．

$\because$ 任意の $\{A_1, \ldots, A_k\} \subset \mathcal{A}$ に対して $\bigcap_{i=1}^{k} A_i \neq \emptyset$ なので，

$$\emptyset \neq p_\lambda\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \subset \bigcap_{i=1}^{k} p_\lambda(A_i)$$

点 x の基本近傍系としては直積位相の定義により，有限個の λ_i $(i = 1, \cdots, k)$ と x_{λ_i} の X_{λ_i} における開近傍 V_{λ_i} に対する

$$p_{\lambda_1}^{-1}(V_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap p_{\lambda_k}^{-1}(V_{\lambda_k}) \tag{2.13}$$

(Ctrl)

の形の集合の全体がとれる．

∵

$$p_{\lambda_i}^{-1}\left(V_{\lambda_i}\right) = \prod_{\lambda} V_{\lambda} \quad \text{ただし，} V_{\lambda} = \begin{cases} V_{\lambda_i} & \lambda = \lambda_i \\ X_{\lambda} & \lambda \neq \lambda_i \end{cases}$$

なので，

$$p_{\lambda_1}^{-1}\left(V_{\lambda_1}\right) \cap \cdots \cap p_{\lambda_k}^{-1}\left(V_{\lambda_k}\right) = \prod_{\lambda} V_{\lambda} \quad \text{ただし，} V_{\lambda} = \begin{cases} V_{\lambda_i} & \lambda = \lambda_i \text{ for some } i \\ X_{\lambda} & \lambda \neq \lambda_i \text{ for all } i \end{cases}$$

であることに注意すれば，

上記は教科書 定理2.22の証明の最後の部分 (p. 125) に書かれた事柄である（その解説は授業で行なった）．

一方，すべての λ に対して，x_λ の X_λ における任意の近傍 V_λ と任意の $A \in \mathcal{A}$ について明らかに

開

$$V_\lambda \cap p_\lambda(A) \neq \emptyset$$

が成立する．

$\because$ V_λ が x_λ の（開）近傍であることと，

$x_\lambda \in \overline{p_\lambda(A)}$（$x_\lambda$が $p_\lambda(A)$ の触点であること）から従う．

一方，すべての λ に対して，x_λ の X_λ における任意の近傍 V_λ と任意の $A \in \mathcal{A}$ について明らかに

開

$$V_\lambda \cap p_\lambda(A) \neq \emptyset$$

が成立する．したがって

$$p_\lambda^{-1}(V_\lambda) \cap A \neq \emptyset$$

となる．

$\because$ 各 $\lambda \in \Lambda$ について，

$V_\lambda \cap p_\lambda(A) \neq \varnothing$ より $V_\lambda \cap p_\lambda(A) \ni y_\lambda$ が存在するので，

$p_\lambda(y) = y_\lambda$ なる $A \ni y$ が存在する．

このとき，$p_\lambda(y) = y_\lambda \in V_\lambda$ より $y \in p_\lambda^{-1}(V_\lambda)$ でもあるので，

$p_\lambda^{-1}(V_\lambda) \cap A \neq \varnothing$.

一方，すべての λ に対して，x_λ の X_λ における任意の近傍 V_λ と任意の $A \in \mathcal{A}$ について明らかに

開

$$V_\lambda \cap p_\lambda(A) \neq \emptyset$$

が成立する．したがって

$$p_\lambda^{-1}(V_\lambda) \cap A \neq \emptyset$$

となる．ここで上記の性質 1) を使えば $p_\lambda^{-1}(V_\lambda) \in \mathcal{A}$ となる~~り，さらに 2) を使えば，(2.13) の形の集合はすべて $\mathcal{A}$ に属することがわか~~る．したがって

$\mathcal{A}$の有限交叉性から

$$p_{\lambda_1}^{-1}(V_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap p_{\lambda_k}^{-1}(V_{\lambda_k}) \cap A \neq \emptyset$$

x の基本近傍系の任意の元

となり，これから確かに $x \in \bar{A}$ となることがわかった． $\square$

おまけ

Tychonoffの定理から選択公理が導かれる.