Nov. 8, 2021

集合と位相 第二　第10回 連結性　補足1

例 2.18　連結であるが弧状連結でない集合としては，$\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$X \triangleq \{(0,y) \mid 0 < y \leq 1\} \cup \{(x,0) \mid 0 < x \leq 1\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, y\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

がある．

まず，X が連結であることを示す．

$$A \triangleq \{(x,0) \mid 0 < x \leq 1\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, y\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq y \leq 1 \right\} = X \setminus \{(0,y) \mid 0 < y \leq 1\}$$

とおくと，A は明らかに弧状連結なので，連結である．A の $\mathbb{R}^2$ における閉包 $\bar{A}$ が

$$\bar{A} = \{(0,y) \mid 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,0) \mid 0 < x \leq 1\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, y\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

となることは容易に分かる．$A \subset X \subset \bar{A}$ なので，教科書 p. 118 の補題 2.1 より，X は連結である．

次に，X が弧状連結でないことを背理法により示す．X が弧状連結であるとすると，

$$F(0) = (0,1), \quad F(1) = (1,0), \quad F(t) \in X \text{ for } t \in [0,1]$$

なる連続写像 $F : [0,1] \to X$ が存在する．射影 $p_1(x,y) = x$, $p_2(x,y) = y$ を用いて，写像 $f : [0,1] \to [0,1]$ と $g : [0,1] \to [0,1]$ を

$$f \triangleq p_1 \circ F, \qquad g \triangleq p_2 \circ F$$

と定めると，f と g は連続である．$T_0 \triangleq \inf g^{-1}(\{0\})$ と定めると，T_0 は集合 $g^{-1}(\{0\})$ の触点であり，$g^{-1}(\{0\})$ は閉集合だから $T_0 \in g^{-1}(\{0\})$，すなわち $g(T_0) = 0$ である．もし $f(T_0) = 0$ であるとすると $F(T_0) = (f(T_0), g(T_0)) = (0,0) \notin X$ となってしまうので，$f(T_0) > 0$ である．$f(0) = p_1(F(0)) = p_1(0,1) = 0$ に注意して，任意に $x_1 \in]0, f(T_0)[\setminus \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を固定すると，中間値の定理から，ある $T_1 \in]0, T_0[$ が存在して $f(T_1) = x_1$ となる．T_0 の定め方から $g(T_1) > 0$ なので，

$$F(T_1) = (f(T_1), g(T_1)) = (x_1, g(T_1)) \notin X$$

となり，これは矛盾である．　□

教科書 p. 124「例 2.18 でわかる通り，弧状連結成分は一般には閉集合とはならない．」の説明

例 2.18 において，X の弧状連結成分は，明らかに $\{(0,y) \mid 0 < y \leq 1\}$ と

$$A = \{(x,0) \mid 0 < x \leq 1\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, y\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

の二つである．上で見たように A の $\mathbb{R}$ における閉包 $\bar{A}$ について $A \subset X \subset \bar{A}$ が成り立つので，A の部分空間 X における閉包は X に一致し，一方 $A \neq X$ なので，A は部分空間 X における閉集合ではない．　□