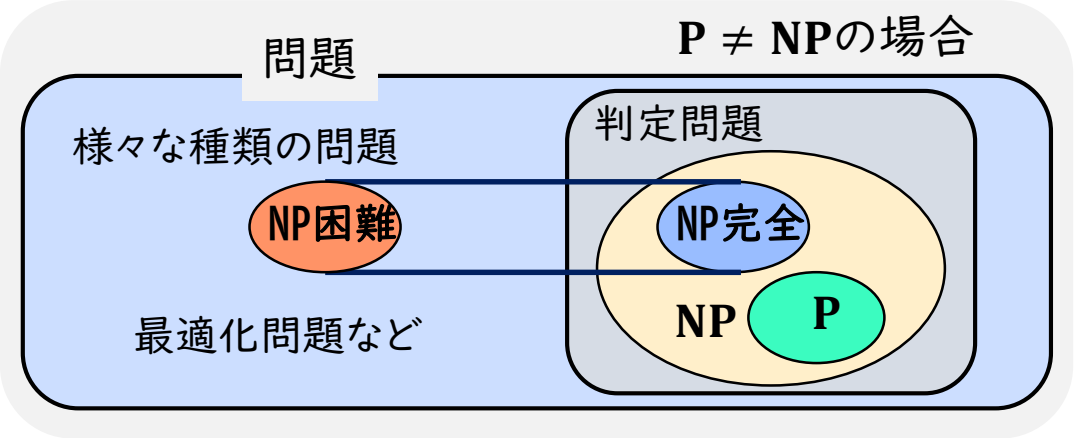
離散構造とアルゴリズム
(4-4) 近似アルゴリズム

高橋篤司
東京工業大学 工学院 情報通信系

4-4（1）NP困難

- 最適化問題
  - NP問題ではない ⇒ NP完全問題ではない
- NP困難(NP-hard)
  - NP完全問題に付随する問題
  - **P ≠ NP**ならば
    - 多項式時間アルゴリズムは存在しない
  - 近似アルゴリズムや発見的手法を用いる



NP困難問題(NP-hard Problem)

- 3彩色問題
  - 3彩色可能なら、グラフの3彩色を一つ示せ
- ハミルトン閉路問題
  - ハミルトングラフなら、ハミルトン閉路を一つ示せ
- 巡回セールスマン問題
  - 重み最小のハミルトン閉路を一つ示せ
- 三角巡回セールスマン問題
  - 三角不等式を満たす重みに対して、重み最小のハミルトン閉路を一つ示せ
- 最大巡回セールスマン問題
  - 重み最大のハミルトン閉路を一つ示せ
- 最大独立点集合問題
  - 点数最大の独立点集合を一つ示せ
- …

4-4（2）近似アルゴリズム

- 最適化問題$\Pi = (I, Q(x))$に対するアルゴリズムA
  - $s \in I$
    - $A(s)$　：アルゴリズム出力の値
    - $OPT(s)$：最適解の値
- 近似比r（approximation ratio）
  - 最大化問題
    - $\frac{OPT(s)}{A(s)} \leq r, \quad \forall s \in I$

近似比≥ 1
近似比$= 1 \Rightarrow$ 厳密アルゴリズム

  - 最小化問題
    - $\frac{A(s)}{OPT(s)} \leq r, \quad \forall s \in I$

※近似比を逆数で定義することもある

- 近似アルゴリズム
  - 近似比が既知のアルゴリズム

4-4（3）三角巡回セールスマン問題

■ 入力

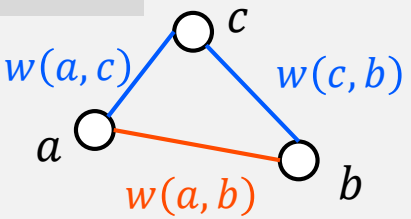
➢ K_n，$w : E(K_n) \longrightarrow \mathbb{R}^+$

✓ wは三角不等式を満たす

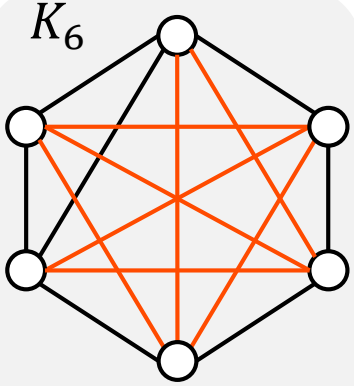
■ 質問

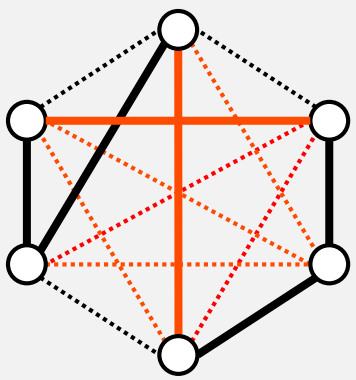
➢ (K_n, w)の最小ハミルトン閉路を一つ示せ

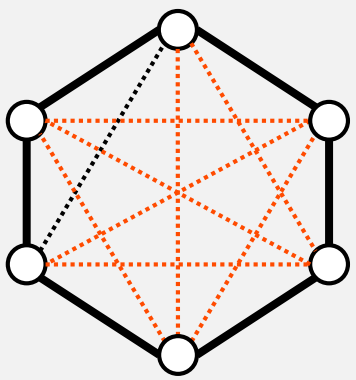
三角不等式



$w(a,b) \leq w(a,c) + w(c,b)$





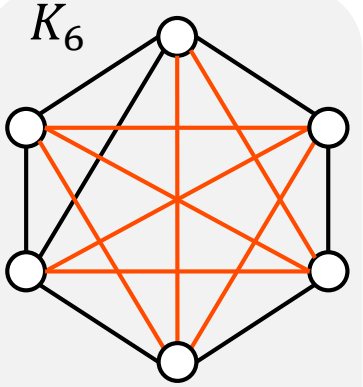


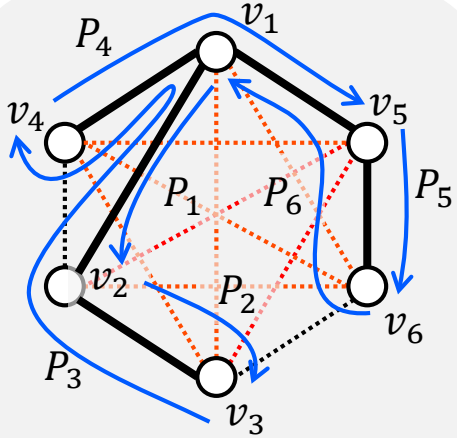
三角巡回セールスマン問題

■ Algorithm 4.3 (TS)

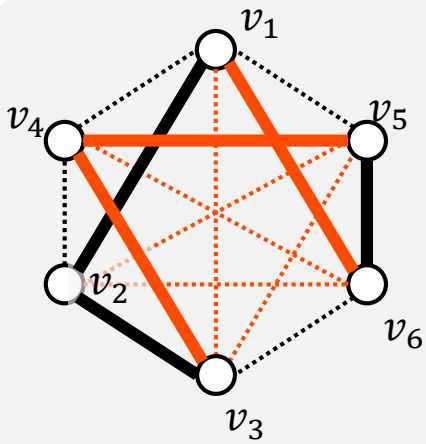
- 入力：完全グラフ K_n，重み関数 $w: E(K_n) \to \mathbb{R}^+$（三角不等式を満たす）
- 出力：(K_n, w)のハミルトン閉路C

1. (K_n, w)の最小全域木Tを求める　$O(n^2 \log n)$　$|E(K_n)| = O(n^2)$
2. Tの前順序番号を求める　$O(n)$　$|E(T)| = O(n)$
3. 前順序の順に巡回する経路Cを出力　$O(n)$





最小全域木T
前順序番号：
$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$



経路C ： $w(C) = 9$

三角巡回セールスマン問題

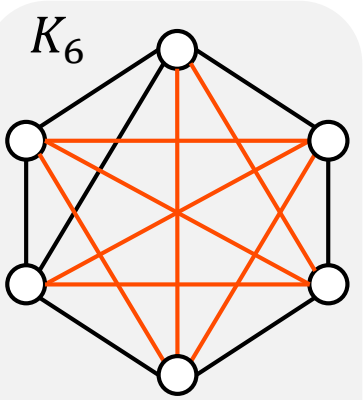
■ 定理（Theorem 4.12）：三角巡回セールスマン問題
- Algorithm 4.3（TS）$O(n^2 \log n)$ 近似比2

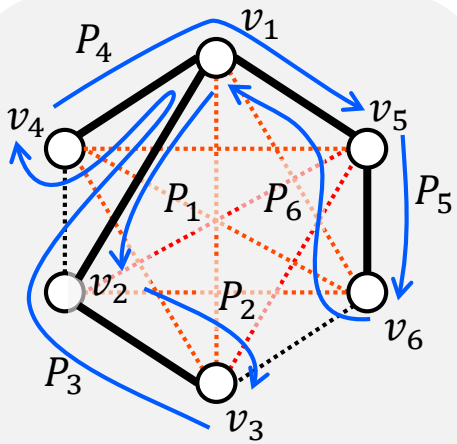
□ 証明：$P_i = (v_i, v_{i+1 \bmod n})$：$T$で$v_i$から$v_{i+1 \bmod n}$への路
- $\sum_{i=1}^{n} w(P_i) = 2w(T)$
- $w(C) = \sum_{i=1}^{n} w(v_i, v_{i+1 \bmod n}) \leq \sum_{i=1}^{n} w(P_i) = 2w(T) \leq 2OPT$

$w(v_i, v_{i+1 \bmod n}) \leq w(P_i)$ ∵ 三角不等式

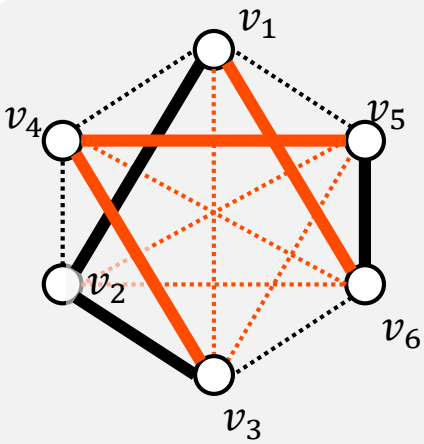
✓ $\frac{w(C)}{OPT} \leq 2$

OPT：最小全域木の重みより短くはない
1辺除くと木 ∴ $w(T) \leq OPT - w(e) \leq OPT$





最小全域木T
前順序番号：
$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$



経路C：$w(C) = 9$

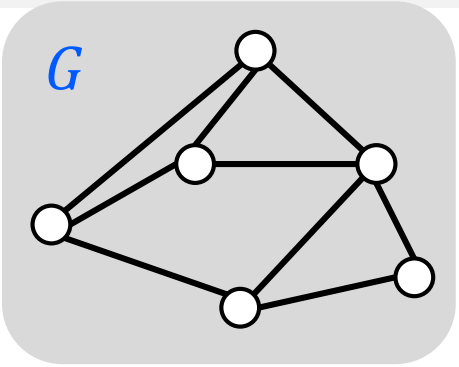
巡回セールスマン問題の近似比

■ 定理 ： 巡回セールスマン問題
- $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ ⇒ 近似比$O(1)$の近似アルゴリズムなし

k： 定数

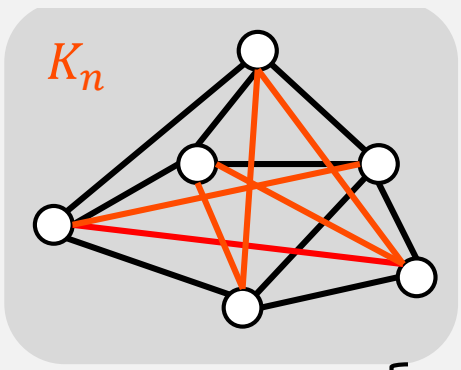
□ 証明 ： 近似比kの近似アルゴリズムを仮定(背理法)
- HGから巡回セールスマン問題を構成
  - ■ (K_n, w)の重みkn以下の閉路 ： Gの辺のみからなる重みnの閉路
  - ■ アルゴリズムの出力
    - Gがハミルトングラフ ⇒ 重みkn以下の閉路(Gのハミルトン閉路)を出力
  - ✓ Gがハミルトングラフか多項式時間で判定可能 ⇒ 矛盾

HG:ハミルトングラフ判定問題



$n = |V(G)|$

巡回セールスマン問題



w
- 1 $(e \in E(G))$
- kn $(e \notin E(G))$

$r := n$

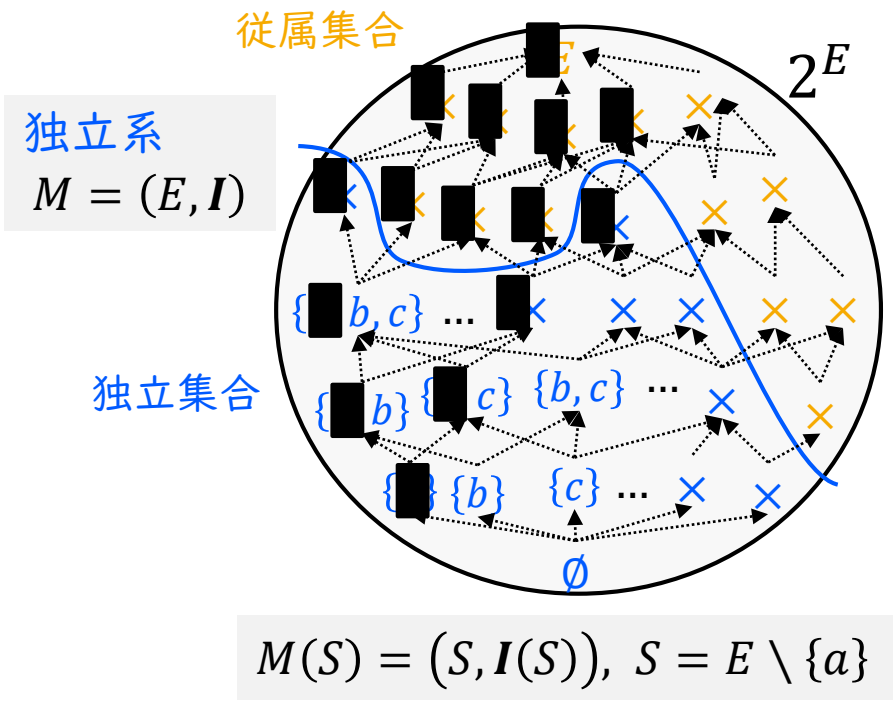
ハミルトン閉路の重み $\begin{cases} n & G\text{の辺のみ} \\ \geq kn + n - 1 & \text{その他の辺含む} \end{cases}$

Gはハミルトングラフ ⇔ (K_n, w)の最小ハミルトン閉路の重みはn

4-4（4）独立系と貪欲アルゴリズム

■ 独立系 $M = (E, \boldsymbol{I})$

1. $\emptyset \in \boldsymbol{I}$
2. $\forall X \in \boldsymbol{I}, Y \subseteq X \Longrightarrow Y \in \boldsymbol{I}$



■ $M(S) = \big(S, \boldsymbol{I}(S)\big)$

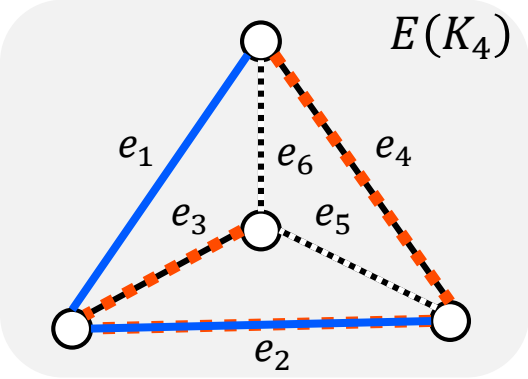
- $S \subseteq E,\ \boldsymbol{I}(S) = \{X \cap S | X \in \boldsymbol{I}\}$
- 独立系
- $\rho_{\max}(S) = \max\{|B| | B \text{は} M(S) \text{の基}\}$
- $\rho_{\min}(S) = \min\{|B| | B \text{は} M(S) \text{の基}\}$

■ $q(M) = \max\left(\dfrac{\rho_{\max}(S)}{\rho_{\min}(S)} \middle| S \subseteq E, \rho_{\min}(S) \neq 0\right)$

貪欲アルゴリズムがだまされる例

- $M_n^{\mathrm{h}} = \left(E(K_n), \boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}\right)$ ： 独立系（マトロイドではない）
  - $\boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}$ ： 辺を追加してハミルトン閉路にできる辺集合$S(\subseteq E(K_n))$の集合
- 性質：ハミルトン閉路の辺集合の部分集合

例：$M_4^{\mathrm{h}} = \left(E(K_4), \boldsymbol{I}_4^{\mathrm{h}}\right)$



$E(K_4) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

$M_4^{\mathrm{h}}(S) = \left(S, \boldsymbol{I}_4^{\mathrm{h}}\right)$

$S = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

$M_4^{\mathrm{h}}(S)$の基

最大： $\rho_{\max}(S) = 3$

最小： $\rho_{\min}(S) = 2$

$X = \{e_2, e_3, e_4\} \in \boldsymbol{I}_4^{\mathrm{h}}$

$Y = \{e_1, e_2\} \in \boldsymbol{I}_4^{\mathrm{h}}$

正解は最大を選ぶ場合であるが，貪欲アルゴリズムは最小を選ぶように仕向ける
この構造では正解との差は高々1.5倍に収まる
最悪の場合でも$q(M) = \max\left(\frac{\rho_{\max}(S)}{\rho_{\min}(S)} \middle| S \subseteq E, \rho_{\min}(S) \neq 0\right)$

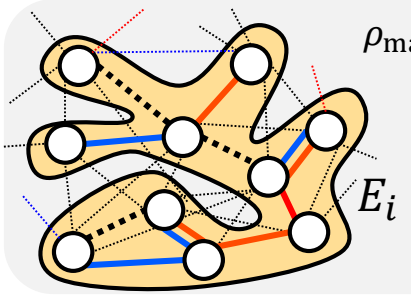
最大基問題 ： 貪欲アルゴリズムの近似比

■ 定理（Theorem 4.13）： 最大基問題（独立系$M = (E, \boldsymbol{I})$）

➢ 貪欲アルゴリズム ： 近似比は高々$q(M) = \max\left(\frac{\rho_{\max}(S)}{\rho_{\min}(S)} \middle| S \subseteq E, \rho_{\min}(S) \neq 0\right)$

□ 証明 ：

- $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}, w(e_1) \geq w(e_2) \geq \cdots \geq w(e_m) \geq w(e_{m+1}) = 0$
  - $E_i = \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$
- 最大基X
  - $X_i = X \cap E_i$　　（$\therefore M(E_i)$の独立集合）
- アルゴリズムの出力B
  - $B_i = B \cap E_i$　　（$\therefore M(E_i)$の基）



$\rho_{\max}(E_i) \geq |X_i|, \quad |B_i| \geq \rho_{\min}(E_i)$

$q(M) \geq \frac{\rho_{\max}(E_i)}{\rho_{\min}(E_i)}$

$|B_i| \geq \rho_{\min}(E_i) \geq \frac{\rho_{\max}(E_i)}{q(M)}$

- $w(B) = \sum_{i=1}^{m}(|B_i| - |B_{i-1}|)w(e_i)$

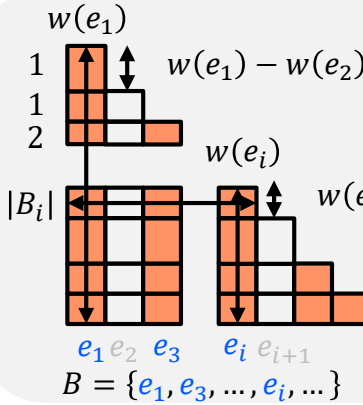
$= \sum_{i=1}^{m}|B_i|\big(w(e_i) - w(e_{i+1})\big)$

$\geq \frac{1}{q(M)}\sum_{i=1}^{m}\rho_{\max}(E_i)\big(w(e_i) - w(e_{i+1})\big)$

$\geq \frac{1}{q(M)}\sum_{i=1}^{m}|X_i|\big(w(e_i) - w(e_{i+1})\big)$

$\geq \frac{1}{q(M)}\sum_{i=1}^{m}(|X_i| - |X_{i-1}|)w(e_i) = \frac{w(X)}{q(M)}$

$\therefore \quad \frac{w(X)}{w(B)} \leq q(M)$



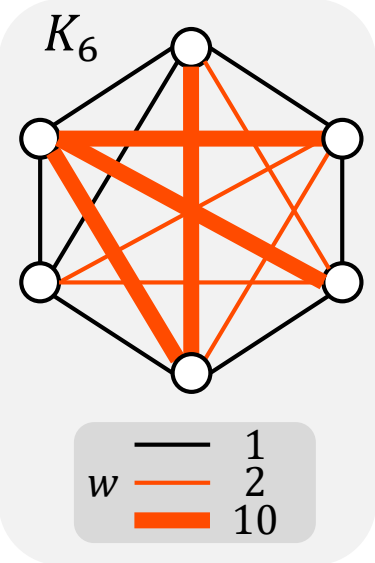
4-4（5）最大巡回セールスマン問題

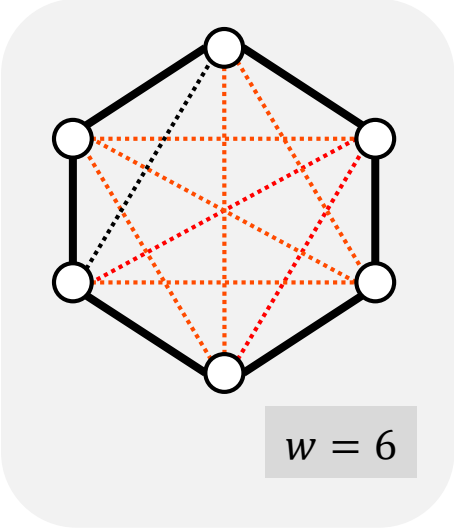
■ 入力

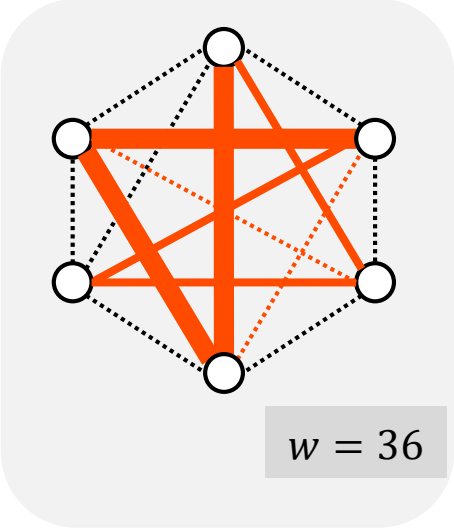
➢ K_n，$w : E(K_n) \longrightarrow \mathbb{R}^+$

■ 質問

➢ (K_n, w)の最大ハミルトン閉路を一つ示せ





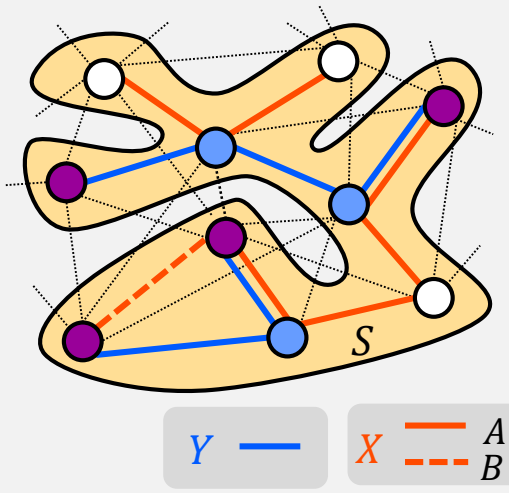


最大巡回セールスマン問題

■ 定理（Theorem 4.14）：最大巡回セールスマン問題
- 貪欲アルゴリズムの近似比は高々2

□ 証明：
- $M_n^{\mathrm{h}} = \left(E(K_n), \boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}\right)$
  - $\boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}$：ハミルトン閉路にできる辺集合の集合
- $\forall S \subseteq E(K_n)$
  - $\forall Y$: $M(S)$の要素数最小の基
  - $\forall X$: $M(S)$の要素数最大の基
    - $|X| = \rho_{\max}(S),\ |Y| = \rho_{\min}(S) > 0$
  - $K_n\langle Y\rangle$の点の次数1か2
    - d_2：$K_n\langle Y\rangle$で次数2の点数，d_1：$K_n\langle Y\rangle$で次数1の点数
    - $2|Y| = 2d_2 + d_1$
  - $\forall e \in X$
    - $K_n\langle Y\rangle$の次数2の点、もしくは次数1の2点に接続
      ∵eが次数0の2点、次数0と次数1の2点に接続する ⇒ $Y \cup \{e\} \in \boldsymbol{I}_n^{\mathrm{h}}$で$Y$は基であることに矛盾
    - $A = \{e \in X \mid K_n\langle Y\rangle$の次数2に接続$\}$，$B = \{e \in X \setminus A \mid K_n\langle Y\rangle$の次数1に接続$\}$
    - $|X| = |A| + |B|$
      - $|A| \leq 2d_2$　∵ $K_n\langle Y\rangle$の次数2の各点に接続できるAの辺はそれぞれ2辺まで
      - $|B| \leq d_1/2$　∵ Bの各辺は$K_n\langle Y\rangle$の次数1の2点に接続
- $2|Y| = 2d_2 + d_1 \geq |A| + 2|B| \geq |A| + |B| = |X| \Rightarrow \frac{|X|}{|Y|} \leq q\left(M_n^{\mathrm{h}}\right) < 2$

$2 * 5 = 2 * 3 + 4 \geq 6 + 2 * 1 \geq 6 + 1 = 7$



$|Y| = 5,\ |X| = 7,\ |A| = 6,\ |B| = 1$

$d_2 = 3,\ d_1 = 4$

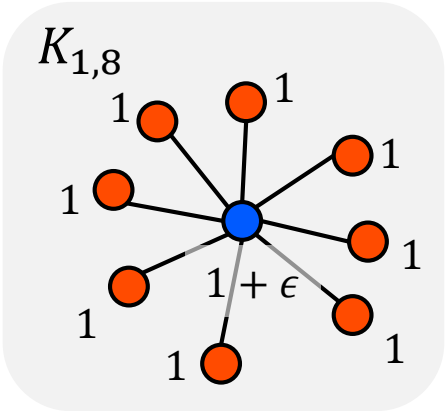
最大独立点集合問題

■ 入力

➢ $G,\ w : V(G) \longrightarrow \mathbb{R}^+$

■ 質問

➢ (G, w)の最大独立点集合をを一つ示せ



■ 定理 ：最大独立点集合問題

- 貪欲アルゴリズムの近似比は少なくとも$\Omega(n)$

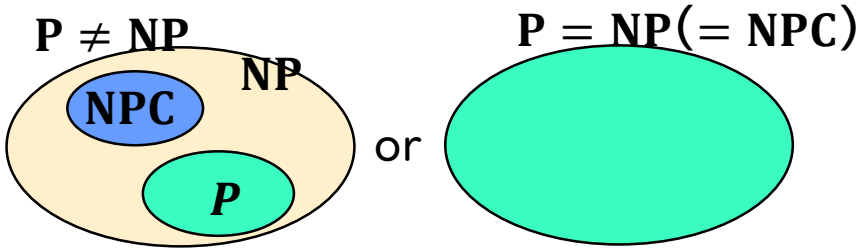
□ 証明

- $M^{\mathrm{ind}}(G) = \left(V(G), \boldsymbol{I}^{\mathrm{ind}}(G)\right)$ （$\boldsymbol{I}^{\mathrm{ind}}(G)$：独立点集合の族）は独立系
- $\rho_{\max}\left(V\left(K_{1,n-1}\right)\right) = n-1,\ \rho_{\min}\left(V\left(K_{1,n-1}\right)\right) = 1$
- $q\left(M^{\mathrm{ind}}\left(K_{1,n-1}\right)\right) \geq \dfrac{\rho_{\max}\left(V\left(K_{1,n-1}\right)\right)}{\rho_{\min}\left(V\left(K_{1,n-1}\right)\right)} = n-1 = \Omega(n)$

P ≠ NP予想

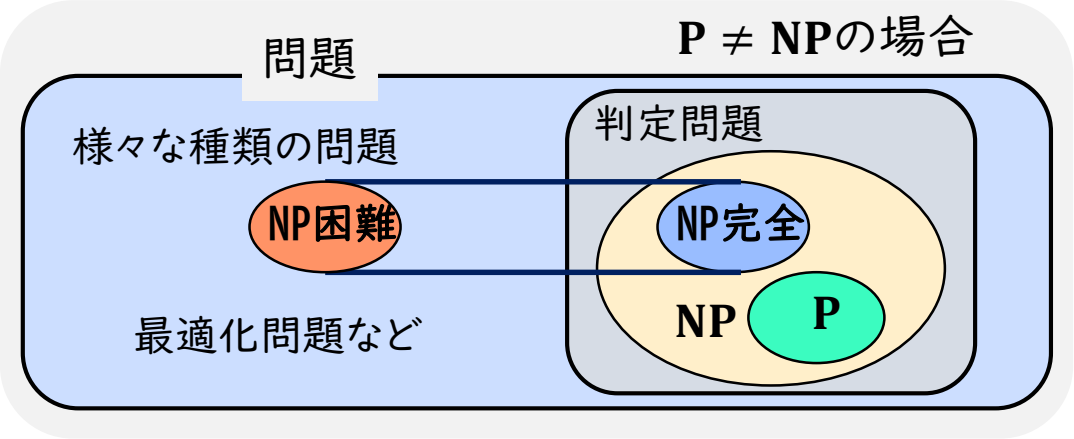
- 判定問題（Yes/No問題）
  - NP ： 判定問題の集合
    - Nondeterministic Polynomial time algorithmあり
  - P ： 判定問題の集合
    - (Deterministic) Polynomial time algorithmあり
  - NPC：NPの中の最も難しい判定問題の集合
    - NPC のある問題が多項式時間で解ける ⇒
      NPに属すすべての問題が多項式時間で解ける
    - NP完全（NP-complete）問題
      - 判定問題∈ NPC
    - SAT, 3-SAT, COL, HG, IS, TS, …

- 事実： $P \subseteq NP$
- 予想： $P \neq NP$



離散構造とアルゴリズム

- 問題の定式化・分析
  - できるかぎり解きやすい問題に
- P問題
  - 計算量の削減・下限の達成
- NP完全・NP困難
  - **P ≠ NP**ならば
    - 多項式時間アルゴリズムは存在しない
  - 近似アルゴリズムや発見的手法を用いる



離散構造とアルゴリズム

ICT.M215

完

高橋篤司

東京工業大学 工学院 情報通信系

教科書：情報とアルゴリズム（上野・高橋 森北出版）

2021