離散構造とアルゴリズム

ICT.M215

高橋篤司

東京工業大学 工学院 情報通信系

教科書：情報とアルゴリズム（上野・高橋　森北出版）

離散構造

- 離散とは？

離散	⟷	連続
整数		実数
可算無限		非可算無限
順序列挙可能		順序列挙不可
ディジタル		アナログ

- 離散集合S： 可算集合
- 離散構造 ： 離散集合の要素間に関係Rが定義

関係R ： $R \subseteq S \times S$ （直積の部分集合）

アルゴリズム

- アルゴリズム
  - 実行可能な処理の適用順序(問題を解くための)

- 問題:答えを要求する
  - 組合せ問題:離散構造で言及される問題
  - 連続関数を対象とする問題
    - 精度の概念を導入し離散化すれば,離散構造上の問題となる

教科書

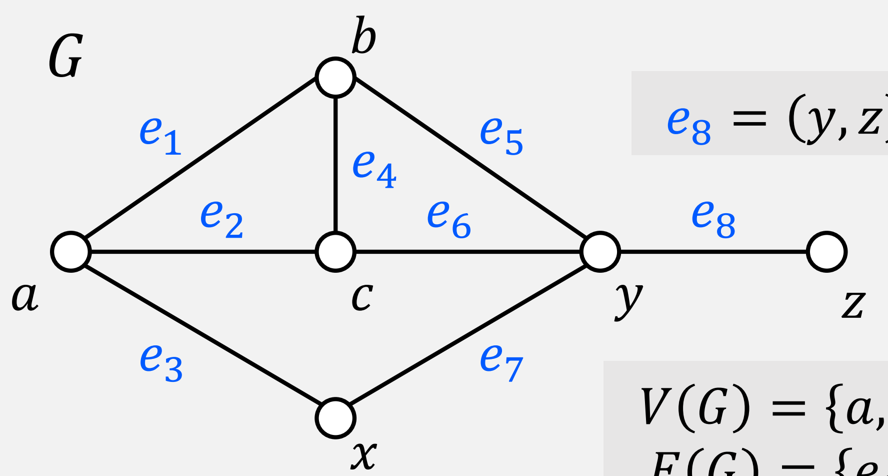
- 情報とアルゴリズム
  - 上野修一, 高橋篤司
  - 森北出版
  1. グラフ
  2. アルゴリズムの解析
  3. グラフのアルゴリズム
  4. アルゴリズムの設計

グラフ $G = (V, E)$

- 離散構造を表現する手段
  - グラフ(graph)：$G = (V, E)$
    - V：点集合 (vertex set)
      - 基本的には有限集合
    - E：辺集合 (edge set) $(E \subseteq V \times V)$

$n = |V|$ ： 点数
$m = |E|$ ： 辺数

$V(G)$ ： グラフGの点集合
$E(G)$ ： グラフGの辺集合

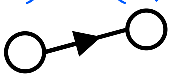


$e_8 = (y, z)$

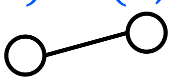
$V(G) = \{a, b, c, x, y, z\}$
$E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_8\}$

様々なグラフ

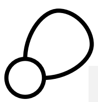
- 離散構造を表現する手段
  - グラフ(graph)：$G = (V, E)$
    - V：点集合 (vertex set)
      - 基本的には有限集合
    - E：辺集合 (edge set) $(E \subseteq V \times V)$
      - 有向辺： $(u, v) \neq (v, u)$ ⇒ 有向グラフ



      - 無向辺： $(u, v) = (v, u)$ ⇒ 無向グラフ

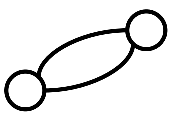


    - ➢ (自己)ループ：反射律に対応

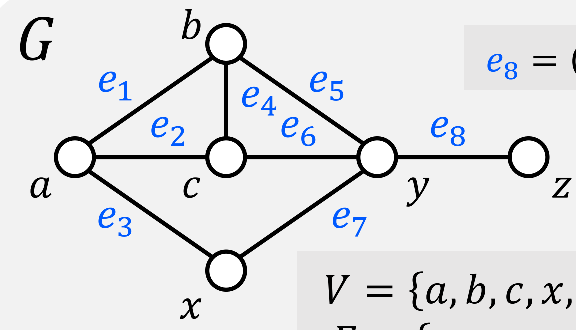


(v, v)

    - ➢ 並列辺：重複集合



$\{(u, v), (u, v)\} \neq \{(u, v)\}$



$e_8 = (y, z)$

$V = \{a, b, c, x, y, z\}$
$E = \{e_1, e_2, \dots, e_8\}$

$n = |V|$ ： 点数
$m = |E|$ ： 辺数

$V(G)$ ： グラフGの点集合
$E(G)$ ： グラフGの辺集合

✓ 単純グラフ：ループ，並列辺を持たないグラフ

情報基礎学 (5類, 2018年度まで開講)

- 教科書:情報基礎数学
  - 佐藤泰介・高橋篤司・伊東利哉・上野修一
  - オーム社
  1. 集合
  2. 写像
  3. 関係
  4. 無限
  5. 論理
  6. 数え上げ
  7. 定義と証明
  8. 木構造とアルゴリズム

集合（確認）

■ 集合 { }

➢ 要素の集まり

- 外延的定義：要素を列挙（順序に意味なし）
  - ◆ $\{a, b, c\}$
  - ◆ $\{0,2,4,6, \ldots\}$
- 内包的定義：条件を書き並べる
  - ◆ $\{n | n \in \mathbb{N},\ n\text{は2の倍数}\}$
  - ◆ $\{n \in \mathbb{N} | n\text{は2の倍数}\}$

区間

➢ $[a, b] = \{r \in \mathbb{R} | a \leq r \leq b\}$

➢ $(a, b) = \{r \in \mathbb{R} | a < r < b\}$

■ 組 ( )

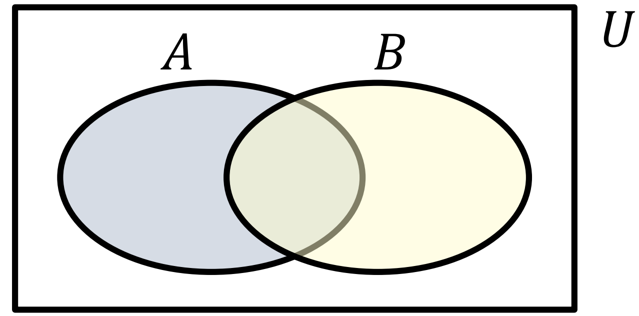
➢ 順序がつけられている成分の集まり

- ◆ (y, m, d)
- ◆ 2つ組（順序対） (x, y)

$$\{a, b, c\} = \{a, c, b\} \neq (a, c, b) \neq (a, b, c)$$

集合演算（確認）

- 積（共通部分）（$\cap$）
  - ➢ $A \cap B = \{c | c \in A, c \in B\}$
    - ◆ $\{1,2\} \cap \{1, b, c\} = \{1\}$
- 和 （$\cup$）
  - ➢ $A \cup B = \{c | c \in A$または$c \in B\}$
    - ◆ $\{1,2\} \cup \{1, b, c\} = \{1,2, b, c\} = \{1,1,2, b, c\}$
- 差 （$\setminus$）
  - ➢ $A \setminus B = \{c | c \in A, c \notin B\}$
    - ◆ $\{1,2\} \setminus \{1, b, c\} = \{2\}$
- 補 （$\overline{}$）
  - ➢ $\overline{A} = \{c \in U | c \notin A\}$（$U$ ： 全体集合）
- 直積 （$\times$）
  - ➢ $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$
    - ◆ $\{1,2\} \times \{1, b, c\} = \{(1,1), (1, b), (1, c), (2,1), (2, b), (2, c)\}$
- 直和 （$+$）
  - ➢ $A + B = \{(a, 0) | a \in A\} \cup \{(b, 1) | b \in B\}$（0,1 ： 任意のラベル）
    - ◆ $\{1,2\} + \{1, b, c\} = \{(1,0), (2,0), (1,1), (b, 1), (c, 1)\}$
- べき
  - すべての部分集合（$\subseteq$）からなる集合
  - ➢ $2^A = \{B | B \subseteq A\}$
    - ◆ $2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

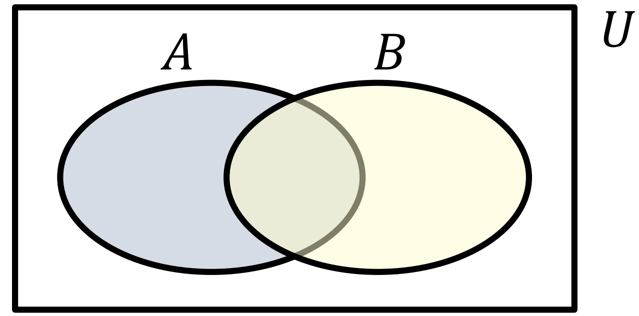


- $|A|$： Aの要素数, 濃度
  - $|\{1,2, b, c\}| = |\{1,1,2, b, c\}| = 4$
- 有限集合
  - $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
  - $|A + B| = |A| + |B|$
  - $|2^A| = 2^{|A|}$

- BはAの部分集合
  - $B \subseteq A$
  - $\forall b \in B, b \in A$

集合の性質（確認）

- $\forall A, \emptyset \subseteq A$
- $\forall A, A \subseteq A$
- $A = B \iff A \subseteq B, B \subseteq A$



- 交換則
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
- 結合則
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$
  - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
- ド・モルガン
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

代表的な集合（確認）

- $\emptyset = \{\}$ ： 空集合(empty set)
  - $|\emptyset| = 0$
- $\mathbb{N}$ ： 自然数(natural numbers) $\{0,1,2,\ldots\}$
  - $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ （アレフ・ゼロ）
- $\mathbb{Z}$ ： 整数(integers) $\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$
- $\mathbb{Q}$ ： 有理数(rational numbers)
- $\mathbb{R}$ ： 実数(real numbers)