

固有値, 固有ベクトル, 行列の対角化可能性の例

固有値と固有空間 (の基底), 対角化可能性

正方行列 A の固有値と固有空間 (の基底) を求めるには

- (1) 固有方程式 $|xE - A| = 0$ を解いて固有値を求める. ($|A - xE| = 0$ を解いても良い.)
- (2) 各固有値 β_i に対し, 方程式 $(A - \beta_i E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解いて, W_{β_i} の基底=基本解 を求める.
- (3) 各固有値 β_i に対し,
 β_i の重複度 $m_i = \dim W_{\beta_i} \equiv$ 基本解の個数
 が成り立てば対角化可能. ある β_i について $m_i > \dim W_{\beta_i}$ なら対角化不可能.

例 1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ の固有値と固有空間 (の基底) を求め, 対角化可能かどうか判定する.

(1) 固有値を求める.

$$|xE - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ 1 & x-4 & -1 \\ -2 & 4 & x \end{vmatrix} = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-2)^2(x-1).$$

固有値は $\beta = 1, 2$ (2 重根).

(2-1) $\beta = 1$ に対する固有空間 (の基底) を求める.

$$A - E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad \dim W_1 = 1 (= \text{重複度})$$

(2-2) $\beta = 2$ (2 重根) に対する固有空間 (の基底) を求める.

$$A - 2E = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore W_2 = \left\langle \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad \dim W_2 = 2 (= \text{重複度})$$

(3) が成立するので対角化可能であり, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ は一次独立だから

$$P = [\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left(Q = [\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_1] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \right)$$

とすれば P, Q は正則で, $A\mathbf{p}_i = \alpha_i \mathbf{p}_i$. 固有ベクトルの並び順に従って固有値が並ぶので

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \left(Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

(検算) 1. 基本解を元の方程式 $(A - \beta E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ に代入して検算する.

($\dim W_{\beta} = n - \text{rank}(A - \beta E)$ より基本解の個数が分かる.)

2. $(A - \beta E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解が $\mathbf{0}$ しかないときは固有値の計算が間違っている可能性が高い.

3. $P^{-1}AP$ は計算しなくても対角化されているはずだが, P^{-1} と $P^{-1}AP$ を計算することにより検算することは出来る. (必ずしも計算する必要はない.)

例 2 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ の固有空間の基底を求め、対角化可能かどうか判定せよ。

解答 (1) 固有値を求める:

$$|A - xE| = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & -1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 2 & 1-x \end{vmatrix} = -(x-1)(x-2)^2 = 0$$

より固有値は $\beta = 1, 2$ (重根).

(2) 固有空間の次元と基底を求める:

$\beta=1$ (重複度 1) のとき:

$$A - E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{p}'_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = 4\mathbf{p}'_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad W_1 = \langle \mathbf{p}_1 \rangle, \quad \dim W_1 = 1$$

$\beta=2$ (重複度 2) のとき:

$$A - 2E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \langle \mathbf{p}_2 \rangle, \quad \dim W_2 (= 3 - \text{rank}(A - 2E)) = 1$$

$\dim W_2 = 1 < 2 = \text{重複度}$ より A は対角化不可能である.

尚, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ と一次独立な $\mathbf{p}_3 = {}^t[0, 0, -1]$ を加えると $P := [\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3]$ は正則で,

$$P = [\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

と三角化できる.

例 3 次の行列は対角化できない.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad J = J(\alpha, n) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \alpha & 1 \\ & & & & \alpha \end{bmatrix} \quad (n \geq 2).$$

($J(\alpha, n)$ は n 次正方行列で **Jordan (ジョルダン) 細胞** (Jordan block) といわれる.)

[証明] $A = J(3, 2)$ だから一般の J について示す.

$$|xE - J(\alpha, n)| = \begin{vmatrix} x-\alpha & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x-\alpha & -1 \\ & & & x-\alpha \end{vmatrix} = (x-\alpha)^n, \quad J(\alpha, n) - \alpha E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

より $J = J(\alpha, n)$ の固有値は α の n 重根.

$$\text{rank}(J - \alpha E) = n - 1, \quad \dim W_\alpha = n - \text{rank}(J - \alpha E) = 1 < n = \alpha \text{ の重複度}$$

より対角化出来ないことが分かる. (なお, 固有ベクトルとして $\mathbf{p} = \mathbf{e}_1 = {}^t[1, 0, \dots, 0]$ がとれる.)

注意 1 一般に, n 次正方行列 A はある正則行列 P により

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J(\gamma_1, n_1) & & \\ & J(\gamma_2, n_2) & \\ & & \ddots \\ & & & J(\gamma_k, n_k) \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{ジョルダン細胞が並ぶブロック対角型の行列} \\ \gamma_1, \dots, \gamma_k \text{ は } A \text{ の固有値 (この中に同じものがあってもよい)} \\ n_1 + \dots + n_k = n, \quad n_i \geq 1 \end{array} \right)$$

と変形できる事が示せる. これを **Jordan (ジョルダン) 標準型** という.

$J(\gamma, 1) = [\gamma]$ (1×1 行列) で, 全ての $n_i = 1$ のときが対角化可能であり, 一つでも $n_i > 1$ なるものがあるれば対角化不可能である.