

第6章 固有値と固有ベクトル (行列の対角化)

この章では行列は全て (n 次) 正方行列とする.

n 次正方行列 A, B に対し $B = P^{-1}AP$ となる n 次正則行列 P があるとき A と B は相似であるといい $A \sim B$ と表した. この章では A と相似な行列の中で最も簡単な形を持つ行列 B を求めることを考える. これは一次変換 $f: V \rightarrow V$ の表現行列が最も簡単な形を持つ様に V の基底を変換することに相当する.

[対角化可能性] B が対角行列になるときを考える. (このとき A は **対角化可能** といわれる.) 即ち,

$$[\text{EV1}] \quad P^{-1}AP = B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

となる正則行列 P があるとする. $P = [\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n]$ と分割するとき $AP = [A\mathbf{p}_1 \cdots A\mathbf{p}_n]$ と $AP = PB$ より

$$[A\mathbf{p}_1 \cdots A\mathbf{p}_n] = AP = PB = [\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n] \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{bmatrix} = [\mathbf{p}_1\alpha_1 \cdots \mathbf{p}_n\alpha_n]$$

P は正則だから $[\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n]$ は一次独立なので, [EV1] は次と同値:

$$[\text{EV1}]' \quad A\mathbf{p}_i = \alpha_i\mathbf{p}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad P = [\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n] \text{ は一次独立,} \quad \text{特に } \mathbf{p}_i \neq \mathbf{0}.$$

[固有値, 固有ベクトル, 固有空間] n 次正方行列 A に対し, 次をみたす $\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{p} \in \mathbb{C}^n$ が存在するとき,

$$[\text{EV2}] \quad A\mathbf{p} = \alpha\mathbf{p}, \quad \mathbf{p} \neq \mathbf{0} \quad (\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{p} \in \mathbb{C}^n)$$

α を A の **固有値** (eigen value), $\mathbf{p}$ を固有値 α に対する A の **固有ベクトル** (eigen vector) といい,

$$[\text{EV3}] \quad W_\alpha := \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}\} = \{\alpha \text{ に対する固有ベクトルと } \mathbf{0}\}$$

を固有値 α に対する A の **固有空間** (eigen space) という. $A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} \Leftrightarrow (A - \alpha E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ より W_α は同次方程式 $(A - \alpha E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間で (例 4.3), $\mathbf{p} \in W_\alpha \neq \{\mathbf{0}\}$ より $\dim W_\alpha \geq 1$ なので次を得る (例 4.10):

定理 6.1 (固有空間の次元) n 次正方行列 A の固有値 α に対する固有空間 W_α は線形部分空間であり, 次元は

$$[\text{EV4}] \quad \dim W_\alpha = n - \text{rank}(A - \alpha E) \geq 1.$$

注 一次変換 $f: V \rightarrow V$ についても $f(\mathbf{p}) = \alpha\mathbf{p}$ ($\alpha \in K, \mathbf{p} \in V, \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$) となるとき, α を f の **固有値**, $\mathbf{p}$ を固有ベクトル, $W_\alpha := \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{v}\}$ を固有空間という. また, V が関数空間のとき, 固有ベクトルは**固有関数**といわれる.

また, [EV1]' は次の様に言い換えられる:

$$[\text{EV1}]' \quad n \text{ 次正方行列 } A \text{ は } n \text{ 個の一次独立な固有ベクトル } \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\} \text{ をもつ. } (P = [\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n])$$

[固有多項式] α が A の固有値 $\Leftrightarrow \text{rank}(A - \alpha E) \leq n-1$ ([EV4]) $\Leftrightarrow A - \alpha E$ は正則でない, より

$$\det(A - \alpha E) = (-1)^n \det(\alpha E - A) = 0$$

$F_A(x) := \det(xE - A)$ とおき, A の **固有多項式** (eigen polynomial) (**特性多項式** (characteristic polynomial)) という. また, n 次方程式 $F_A(x) = 0$ を A の **固有方程式** (eigen equation), (**特性方程式** (characteristic equation)) という. このとき, $F_A(\alpha) = \det(\alpha E - A) = 0$ より,

$$[\text{固有値}] \quad \alpha \text{ が } A \text{ の固有値} \iff \alpha \text{ は固有方程式 } F_A(x) = |xE - A| = 0 \text{ の解}$$

代数学の基本定理により n 次多項式は複素数の範囲で n 個の一次式の積に分解する. 即ち

$$[\text{EV5}] \quad F_A(x) = |xE - A| = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}).$$

ここで $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ の中に同じものがあって良い. 従って n 次方程式 $F_A(x) = 0$ は重複も数えてちょうど n 個の**根** (こん, root) $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ をもつ. (代数方程式では「解」の代わりに「根」という. 根という用語は平方根や根号の様に使われる.) 同じ根をまとめて, 相異なる根を $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ とすると [EV5] は

$$[\text{EV5}]' \quad F_A(x) = (x - \beta_1)^{m_1}(x - \beta_2)^{m_2} \cdots (x - \beta_k)^{m_k}, \quad m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$$

と表される. m_i を β_i の **重複度** (multiplicity) といい, β_i を m_i **重根** という. なお, 1 重根を単根といい, 2 重根は単に 重根といわれることがある. また, 固有値は**特性根**とも言われる.

$A = [a_{ij}]$ とすると,

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix} = (x - a_{11})(x - a_{22}) \cdots (x - a_{nn}) + (x \text{ の } (n-2) \text{ 次以下の項})$$

$$= x^n - (a_{11} + \cdots + a_{nn})x^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A| \quad (\text{定数項} = F_A(0) = |-A| = (-1)^n |A|)$$

$a_{11} + \cdots + a_{nn} = \text{tr } A$ (対角成分の和) より

$$[\text{EV6}] \quad F_A(x) = |xE - A| = x^n - (\text{tr } A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A| \quad (n \text{ 次多項式})$$

[EV5] の右辺 $= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$ を展開して [EV6] の右辺と比較すれば次を得る (根と係数の関係) :

[EV7] $\operatorname{tr} A = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ (固有値の和), $\det A = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ (固有値の積).

これより, A が正則 ($\Leftrightarrow \det A \neq 0$) $\Leftrightarrow$ 固有値が全て 0 でない, が分かる.

正則行列 P に対し, $F_{P^{-1}AP}(x) = |xE - P^{-1}AP| = |P^{-1}(xE - A)P| = |P^{-1}||xE - A||P| = |xE - A| = F_A(x)$ より,

[EV8] $F_{P^{-1}AP}(x) = F_A(x)$. 即ち, A と $P^{-1}AP$ の固有多項式は一致し, 従って全ての固有値は一致する.

• 以下, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ は A の重複を含めた全ての固有値とし, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ は A の全ての相異なる固有値とする.

[行列の対角化] 対角化可能性については [EV1]' より容易な判定法がある.

補題 6.2 (固有ベクトルの一次独立性) n 次正方行列 A の相異なる固有値 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j$ ($j \leq k$) に対する固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_j$ は一次独立である. 従って, 全ての固有空間の和空間は直和である. 即ち

$$W_{\beta_1} + W_{\beta_2} + \cdots + W_{\beta_k} = W_{\beta_1} \oplus W_{\beta_2} \oplus \cdots \oplus W_{\beta_k}.$$

証明 j に関する帰納法で示す:

$[j=1]$: $\mathbf{p}_1 \neq \mathbf{0}$ より成立. $[j-1]$: $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{j-1}$ が一次独立と仮定.

(*) $\mathbf{x} := s_1 \mathbf{p}_1 + \cdots + s_j \mathbf{p}_j, \quad s_1, \dots, s_j \in \mathbb{C}$

とおき, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ と仮定して $s_1 = \cdots = s_j = 0$ を示せば良い. $(A - \beta_j E)\mathbf{x} = \mathbf{0}, (A - \beta_j E)s_i \mathbf{p}_i = s_i(A\mathbf{p}_i - \beta_j \mathbf{p}_i) = s_i(\beta_i - \beta_j)\mathbf{p}_i$ より

$$\mathbf{0} = (A - \beta_j E)\mathbf{x} = (A - \beta_j E)(s_1 \mathbf{p}_1 + \cdots + s_j \mathbf{p}_j) = s_1(\beta_1 - \beta_j)\mathbf{p}_1 + \cdots + s_{j-1}(\beta_{j-1} - \beta_j)\mathbf{p}_{j-1} + s_j(\beta_j - \beta_j)\mathbf{p}_j = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{j-1}$ が一次独立より $s_1(\beta_1 - \beta_j) = \cdots = s_{j-1}(\beta_{j-1} - \beta_j) = 0$. $\beta_i \neq \beta_j, i=1, \dots, j-1$ より $s_1 = \cdots = s_{j-1} = 0$.

(*) に代入して $s_j \mathbf{p}_j = \mathbf{0}$. $\mathbf{p}_j \neq \mathbf{0}$ より $s_j = 0$. よって $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_j$ が一次独立となる.

直和になること $\Leftrightarrow [\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k = \mathbf{x}'_1 + \cdots + \mathbf{x}'_k, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i \in W_{\beta_i} \Rightarrow \mathbf{x}_i = \mathbf{x}'_i \quad (i=1, \dots, k)]$ だが, この仮定のもとで $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1) + \cdots + (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}'_k) = \mathbf{0}, \mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i \in W_{\beta_i}$. ここで $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i \neq \mathbf{0}$ なる i があるとすると, $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i$ は固有値 β_i に対する固有ベクトルだから, 上で示した一次独立性に反する. よって 全ての i について $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i = \mathbf{0}$. $\square$

系 6.3 A の固有値が全て異なれば対角化可能.

定理 6.4 (対角化の必要十分条件) n 次正方行列 A について次は同値:

(1) A は対角化可能.

(2) A は一次独立な n 個の固有ベクトル $P = [\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n]$ を持つ. このとき α_i を $\mathbf{p}_i$ の固有値とすれば

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

(3) A の相異なる全ての固有値を $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, 重複度を $m_1, m_2, \dots, m_k$ とする, 即ち

$$F_A(x) = |xE - A| = (x - \beta_1)^{m_1} \cdots (x - \beta_k)^{m_k}, \quad m_1 + \cdots + m_k = n$$

とする. このとき $\dim W_{\beta_i} = m_i \quad (i=1, \dots, k)$ (固有空間の次元 = 固有値の重複度)

(4) $\mathbb{C}^n = W_{\beta_1} \oplus W_{\beta_2} \oplus \cdots \oplus W_{\beta_k}$.

証明 (1) $\Leftrightarrow$ (2) は [EV1] $\Leftrightarrow$ [EV1]'.

(2) $\Rightarrow$ (3): (2) より, ある正則行列 $P = [\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n]$ により ($\mathbf{p}_i$ を同じ固有値ごとにまとめる様に並べれば)

$$P^{-1}AP = B = \begin{bmatrix} \beta_1 E_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_k E_{m_k} \end{bmatrix}$$

と出来る. このとき $\operatorname{rank}(A - \beta_i E) = \operatorname{rank} P^{-1}(A - \beta_i E)P = \operatorname{rank}(P^{-1}AP - \beta_i E) = n - m_i$. [EV4] より

$$\dim W_{\beta_i} = n - \operatorname{rank}(A - \beta_i E) = n - (n - m_i) = m_i, \quad (i=1, \dots, k).$$

(3) $\Rightarrow$ (4): $\mathbb{C}^n \supset W_{\beta_1} \oplus \cdots \oplus W_{\beta_k} =: W$ (補題 6.2), $\dim W = \sum_{i=1}^k \dim W_{\beta_i} = \sum_{i=1}^k m_i = n$ (定理 4.7) と定理 4.10 による.

(4) $\Rightarrow$ (2): 各 W_{β_i} の基底 $\mathbf{p}_{i,1}, \dots, \mathbf{p}_{i,m_i}$ は固有ベクトル, これら全体は $\mathbb{C}^n$ の基底, 即ち一次独立な n 個の組. $\square$

• この定理 6.4 により, A の固有値と固有空間 (の基底) を求めるには

(1) 固有方程式 $F_A(x) = |xE - A| = 0$ を解いて固有値を求める. ($(-1)^n F_A(x) = |A - xE| = 0$ を解いても良い.)

(2) 各固有値 β_i に対し, 同次方程式 $(A - \beta_i E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解いて, W_{β_i} の基底 = この方程式の基本解 を求める.

(3) 各固有値 β_i に対し, β_i の重複度 $m_i = \dim W_{\beta_i} \equiv$ 基本解の個数 が成り立てば対角化可能.

($P =$ 基本解を全て並べた行列, は定理 6.4 より正則.) ある β_i について $m_i > \dim W_{\beta_i}$ なら対角化不可能.