線形写像と表現行列の例と例題

[線形写像の表現行列 1]　$m\times n$ 行列 H の定める線形写像 $f: K^n \to K^m$, $f(\boldsymbol{x}) = H\boldsymbol{x}$ の K^n の標準基底 $E_n = [\boldsymbol{e}_1 \cdots \boldsymbol{e}_n]$, K^m の標準基底 $E_m = [\boldsymbol{e}_1 \cdots \boldsymbol{e}_m]$ に関する表現行列は H そのものである．K^n の基底 $A = [\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]$, K^m の基底 $B = [\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_n]$ に関する表現行列 H' は，E_n から A への変換行列 A , E_m から B への変換行列 B を用いて，$H' = B^{-1}HA$ により求まる (定理 4.12).
特に一次変換 $f: K^n \to K^n$ の場合，即ち $m = n$, $A = B$ のときは $H' = A^{-1}HA$ (系 4.14).

例題 (表現行列 1)　K^2 の一次変換 $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y \\ 2x-y \end{bmatrix}$ の，基底 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ に関する表現行列 F を求めよ.

解　一次変換 f の標準基底 $E_2 = [\boldsymbol{e}_1\, \boldsymbol{e}_2]$, に関する表現行列 H は $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.　このとき,

$F = A^{-1}HA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

[関数空間上の線形写像] 関数 $f(x)$ にその導関数 $\dfrac{df}{dx}(x)$ や不定積分 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ を対応させる写像は線形写像になる.（微分，積分の線型性．証明は微積分学による.）　例えば，$C^0(\mathbb{R})$, $C^1(\mathbb{R})$ をそれぞれ $\mathbb{R}$ 上の連続関数全体，C^1 級関数全体の作るベクトル空間とし．$s, t \in \mathbb{R}$ とする．このとき，

(1) $F_1(f)(x) = \dfrac{df}{dx}(x)$,　$F_1 : K[x] \to K[x]$,　$F_1 : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ は

$$F_1(sf+tg)(x) = \frac{d(sf+tg)}{dx}(x) = s\frac{df}{dx}(x) + t\frac{dg}{dx}(x) = sF_1(f)(x) + tF_1(g)(x) \text{　より,}$$

(2) $F_2(f)(x) = \displaystyle\int_a^x f(y)dy$,　$F_2 : K[x] \to K[x]$,　$F_2 : C^0(\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R})$ は

$$F_2(sf+tg)(x) = \int_a^x (sf(y)+tg(y))dy = s\int_a^x f(y)dy + t\int_a^x g(y)dy = sF_2(f)(x) + tF_2(g)(x) \text{　より}$$

[L3] をみたし, 線形写像となる．適当な部分空間（例えば : $K[x]_{n+1}$，$K[x]_n$ や $C^\infty(\mathbb{R})$）に制限して考えても同様.
$F_3, F_4 : C^0(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ を次の様に定めると線形写像になる:　$a(x) \in C^0(\mathbb{R})$, $b\in\mathbb{R}$ として
(3) $F_3(f)(x) = a(x)f(x)$. $(\because)$ $F_3(sf+tg)(x) = a(x)(sf+tg)(x) = s(a(x)f(x)) + t(a(x)g(x)) = sF_3(f)(x) + tF_3(g)(x)$.
(4) $F_4(f)(x) = f(x-b)$. $(\because)$ $F_4(sf+tg)(x) = (sf+tg)(x-b) = sf(x-b) + tg(x-b) = sF_4(f)(x) + tF_4(g)(x)$.

• これらは一般化できて, 高階微分や高階偏微分, 多重積分や, その一次結合についても同様に線型写像になる．例えば, $a_0, \ldots, a_n$ を x の関数とするとき,

$$L(f) = a_n\frac{d^n f}{dx^n} + \cdots + a_1\frac{df}{dx} + a_0 f$$

は (適当な部分空間上で) 線型写像になり, 線型微分方程式 $Lf = 0$ を解くことは $f\in \mathrm{Ker}\, L$ を求めることと言い換えられる.

例題 (表現行列 2)　2 次以下の実係数多項式 $p(x) = ax^2 + bx + c$ 全体のつくるベクトル空間 を $\mathbb{R}[x]_2$ とする．一次変換 $F : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$, $F(p)(x) = (x+3)\frac{dp}{dx}(x)$ について，F の，基底 $[x^2, x, 1]$ に関する表現行列を求めよ.

解　$F(p)(x) = (x+3)\dfrac{dp}{dx}(x) = 2ax^2 + (b+6a)x + 3b$ より，　$F(x^2) = 2x^2 + 6x$,　$F(x) = x+3$,　$F(1) = 0$.　よって

(基底の並び順に注意して)　$F([x^2, x, 1]) = [2x^2+6x, x+3, 0] = \begin{bmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ より $H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

別解として, $\begin{bmatrix} F(x^2) \\ F(x) \\ F(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^2+6x+0 \\ 0x^2+\ \ x+3 \\ 0x^2+0x+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$　転置して, $F([x^2, x, 1]) = [x^2, x, 1] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = [x^2, x, 1]H$.

(このとき $F(p)(x) = [x^2, x, 1] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 2ax^2 + (b+6a)x + 3b$.)

例題 (核と像) $\mathbb{R}^3$ の一次変換 $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y+3z \\ -3x+2y+7z \\ 3x+\ y\ -z \end{bmatrix}$ の, 核と像の基底と次元を求めよ.

解　$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, $(\boldsymbol{x} = {}^t[x, y, z])$ より f の核は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間で, 基底としては基本解が, また, 像の基底として A の軸列がとれる．よって A の階段行列を求めれば核と像の基底が求まる.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\therefore$ 像の基底として $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. 核の基底として $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ がとれる.
よって $\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$, $\dim \mathrm{Im}\, f = 2$.