線形写像

[線型写像]: $m{\times}n$ K-行列 H に対し, n 次元数空間 K^n から m 次元数空間 K^m への写像

$$f = f_H : K^n \to K^m \quad \text{が} \quad f_H(\boldsymbol{x}) := H\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in K^n)$$

で定まる. これを行列 H の定める **線形写像** といい, H を f_H の**表現行列**という. $m{=}n$ のとき, $f_H : K^n \to K^n$ を **一次変換**, 又は **線形変換**ともいう.

$f(\boldsymbol{x}) = f_H(\boldsymbol{x}) = H\boldsymbol{x}$ は行列の積だから次の性質 **[L]** を持つ : $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K^n$, $s \in K$ として,

[L1] $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = H(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = H\boldsymbol{x} + H\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$, **[L2]** $f(\boldsymbol{x}s) = H(\boldsymbol{x}s) = (H\boldsymbol{x})s = f(\boldsymbol{x})s$

$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = H\boldsymbol{x}$ $(H = [h_{ij}])$ は次の様に n 変数の定数項のない一次関数の m 個の組である:

$$\begin{cases} y_1 = h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + \cdots + h_{1n}x_n \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_m = h_{m1}x_1 + h_{m2}x_2 + \cdots + h_{mn}x_n \end{cases}$$

- 一般に, K 上のベクトル空間 V から W への写像 $f : V \to W$ が上記の性質 **[L]**(=[L1], [L2]) をもつ, 即ち

[L1] $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b}) \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V)$

[L2] $f(\boldsymbol{a}s) = f(\boldsymbol{a})s, \quad f(s\boldsymbol{a}) = sf(\boldsymbol{a}) \quad (\boldsymbol{a} \in V, \ s \in K)$

をみたすとき f を (K 上の) **線形写像** (一次写像) といい, この性質を**線形性**という. **和, スカラー倍を保つ**, あるいは**和, スカラー倍と交換する**ともいう. $V = W$ のとき $f : V \to V$ は V の**一次変換**, **線形変換**ともいう.

[L2] で $s{=}0, -1$ として次の [L0] を得る.

[L0] $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}, \quad f(-\boldsymbol{a}) = -f(\boldsymbol{a})$. (より詳しくは $f(\boldsymbol{0}_V) = \boldsymbol{0}_W$, $\boldsymbol{0}_V, \boldsymbol{0}_W$ は V, W の零ベクトル.)

$(\because)$ $f(\boldsymbol{0}_V) = f(\boldsymbol{0}_V 0) \overset{\text{L2}}{=} f(\boldsymbol{0}_V)0 = \boldsymbol{0}_W$. $f(-\boldsymbol{a}) = f((-1)\boldsymbol{a}) \overset{\text{L2}}{=} (-1)f(\boldsymbol{a}) = -f(\boldsymbol{a})$.

例 1(線形写像の判定) 次の写像 $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ において f_1 は線形写像であり, f_2 は線形写像ではない.

$$f_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad f_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^2+y \\ x+1 \end{bmatrix}$$

f_1 が行列で表されるので [L1],[L2] をみたす事は容易に確かめられる: $\boldsymbol{a} = {}^t[a_1, a_2]$, $\boldsymbol{b} = {}^t[b_1, b_2]$, $s{\in}\mathbb{R}$ とするとき,

$$f(\boldsymbol{a}{+}\boldsymbol{b}) = f\left(\begin{bmatrix} a_1{+}b_1 \\ a_2{+}b_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (a_1{+}b_1){+}(a_2{+}b_2) \\ 2(a_2{+}b_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1{+}a_2 \\ 2a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1{+}b_2 \\ 2b_2 \end{bmatrix} = f(\boldsymbol{a}){+}f(\boldsymbol{b}),$$

$$f(s\boldsymbol{a}) = f\left(\begin{bmatrix} sa_1 \\ sa_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} sa_1{+}sa_2 \\ 2sa_2 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} a_1{+}a_2 \\ 2a_2 \end{bmatrix} = sf(\boldsymbol{a}).$$

f_2 は 第 2 成分に定数項があるので $f_2(\boldsymbol{0}) = {}^t[0, 1] \neq \boldsymbol{0}$ より [L0] を満たさない.

また, 第 1 成分は 1 次関数ではないので, 次の例の様に [L1],[L2] を満たさない: $\boldsymbol{a}{=}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}{=}2\boldsymbol{a}{=}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $s{=}3$ のとき

$f_2(\boldsymbol{a}{+}\boldsymbol{b}){=}f_2(3\boldsymbol{a}){=}f_2\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right){=}\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$. $f_2(\boldsymbol{a}){+}f_2(\boldsymbol{b}){=}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}{+}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}{=}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \neq f_2(\boldsymbol{a}{+}\boldsymbol{b})$. $3f_2(\boldsymbol{a}){=}3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}{=}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \neq f_3(3\boldsymbol{a})$

よって線形写像ではない.

問 1 次の写像 $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は線形写像かどうかを調べよ.

$$f_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x+y \\ x-2y \end{bmatrix}, \qquad f_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^2+y^2+2 \\ x-y+1 \end{bmatrix}$$

[L1]+[L2] は次の [L3] と同値であり, [L3] を繰り返し使えば次の [L4] を得る:

[L3] $f(\boldsymbol{a}s + \boldsymbol{b}t) = f(\boldsymbol{a})s + f(\boldsymbol{b})t$

[L4](i) $f(\boldsymbol{a}_1 s_1{+}\cdots{+}\boldsymbol{a}_n s_n) = f(\boldsymbol{a}_1)s_1{+}\cdots{+}f(\boldsymbol{a}_n)s_n, \quad f\Big(\sum_{i=1}^n \boldsymbol{a}_i s_i\Big) = \sum_{i=1}^n f(\boldsymbol{a}_i)s_i$

$(\because)$ [L1]+ [L2]$\Rightarrow$[L3]: $f(\boldsymbol{a}s + \boldsymbol{b}t) \overset{[\text{L1}]}{=} f(\boldsymbol{a}s) + f(\boldsymbol{b}t) \overset{[\text{L2}]}{=} f(\boldsymbol{a})s + f(\boldsymbol{b})t$.

[L3]$\Rightarrow$[L1]: $t{=}0$ とすれば, $f(\boldsymbol{a}s) = f(\boldsymbol{a}s{+}\boldsymbol{0}_V 0) \overset{[\text{L3}]}{=} f(\boldsymbol{a})s{+}f(\boldsymbol{0}_V)0 = f(\boldsymbol{a})s{+}\boldsymbol{0}_W = f(\boldsymbol{a})s$ より [L1] を得る.

[L3] $\Rightarrow$ [L2] : $s{=}t{=}1$ とすれば, $f(\boldsymbol{a}{+}\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}1 + \boldsymbol{b}1) \overset{[\text{L3}]}{=} f(\boldsymbol{a})1 + f(\boldsymbol{b})1 = f(\boldsymbol{a}){+}f(\boldsymbol{b})$ より [L2] を得る.

[L4]: 左辺 $\overset{[\text{L3}]}{=} f(\boldsymbol{a}_1 s_1 + \cdots + \boldsymbol{a}_{n-1}s_{n-1}) + f(\boldsymbol{a}_n)s_n \overset{[\text{L3}]}{=} \cdots \overset{[\text{L3}]}{=} f(\boldsymbol{a}_1)s_1 + \cdots + f(\boldsymbol{a}_n)s_n =$ 右辺.

$\therefore$ $f(\sum_{i=1}^n \boldsymbol{a}_i s_i) = \sum_{i=1}^n f(\boldsymbol{a}_i)s_i$ (一次結合の像は像の一次結合になる.)

例 2 K 上のベクトル空間 V と V のベクトルの組 $A{=}[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]$ に対し, 写像 $\varphi_A : K^n \to V$ を

$$\varphi_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_1 x_1{+}\cdots{+}\boldsymbol{a}_n x_n \quad (\boldsymbol{x} = {}^t[x_1 \cdots x_n] \in K^n)$$

で定めると線型写像になる. ([L1],[L2] をみたす事を確かめればよい.)

$(\because)$ [L1]: $\varphi_A(\boldsymbol{x}{+}\boldsymbol{x}'){=}A(\boldsymbol{x}{+}\boldsymbol{x}'){=}A\boldsymbol{x}{+}A\boldsymbol{x}'{=}\varphi_A(\boldsymbol{x}){+}\varphi_A(\boldsymbol{x}')$, [L2]: $\varphi_A(\boldsymbol{x}s){=}A(\boldsymbol{x}s) = (A\boldsymbol{x})s{=}\varphi_A(\boldsymbol{x})s$ による.

例 3 $M_{m.n}(K)$ を $m{\times}n$ K-行列全体のつくるベクトル空間, A, B をそれぞれ $\ell{\times}m$ K-行列, $n{\times}k$ K-行列とするとき, A, B を左右から掛ける写像 f は線型写像になる.

$$f : M_{m.n}(K) \to M_{\ell.k}(K), \qquad f(X) = AXB$$

$(\because)$ $X, Y{\in}M_{m.n}(K)$, $s, t{\in}K$ に対し, [L3]: $f(Xs{+}Yt) = A(Xs{+}Yt)B = (AXB)s{+}(AYB)t = f(X)s{+}f(Y)t$.

例 4 (微分積分の線形性) 微分可能な関数 $f_1(x), f_2(x)$, 連続関数 $g_1(x), g_2(x)$ と定数 s, t に対し,

$$\frac{d(sf_1+tf_2)}{dx}(x) = s\frac{df_1}{dx}(x)+t\frac{df_2}{dx}(x), \quad \int_a^x(sg_1(t)+tg_2(t))dt = s\int_a^x g_1(t)dt+ t\int_a^x g_2(t)dt$$

が成り立つ (それぞれ, **微分の線形性**, **積分の線形性**という).

注 (関数や置換のときと同様) 一般に, 写像 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ の**合成写像** $g\circ f: X \to Z$ が $(g\circ f)(x) := g(f(x))$ $(x\in X)$ で定められ, $X=Y=Z$ のときは**合成変換**ともいう. **恒等写像** (identity map(ping)) 又は **恒等変換** $1_X: X \to X$ を $1_X(x) = x$ $(x\in X)$ で定める. 1_X は $\mathrm{Id}, \mathrm{Id}_X$, または I とも表す. 写像 $f: X \to Y$ に対し, 写像 $g: Y \to X$ で $g(f(x)) = x$, $f(g(y)) = y$ $(x\in X,\ y\in Y)$ (即ち, $g\circ f = 1_X$, $f\circ g = 1_Y$) をみたすものが存在するとき, f を (集合の) **同型写像**という. g を f の**逆写像**といい, g を f^{-1} と表す. $X=Y$ のときは g を f の**逆変換**ともいう. このとき g も同型写像で, $g^{-1}=f$ である.

例 5 (恒等写像, 合成写像, 逆写像) ベクトル空間 V の恒等写像 1_V, ベクトル空間 V, W, U の間の線形写像 $f: V \to W$, $g: W \to U$ の合成写像 $g\circ f$, および (もしあれば) f の逆写像 $f^{-1}: W \to V$ は線形写像である. なお, 同型である線形写像は**線形同型写像**, 略して単に**同型写像**という. また, V, W の間に線形同型写像 $f: V \to W$ が存在するとき, V と W は**線形同型**である, またはベクトル空間として**同型**であるといわれる. このとき, V と W は f により同じものとみなされる.

[L4] は, $A = [\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]$, $\boldsymbol{s} = {}^t[s_1 \cdots s_n]$, $\boldsymbol{a}_1 s_1+\cdots+\boldsymbol{a}_n s_n = A\boldsymbol{s}$ とすれば,

$$f(A\boldsymbol{s}) = f(\boldsymbol{a}_1 s_1+\cdots+\boldsymbol{a}_n s_n) \overset{\text{[L4(i)]}}{=} f(\boldsymbol{a}_1)s_1+\cdots+f(\boldsymbol{a}_n)s_n = [f(\boldsymbol{a}_1) \cdots f(\boldsymbol{a}_n)]\begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_1 \end{bmatrix} = [f(\boldsymbol{a}_1) \cdots f(\boldsymbol{a}_n)]\boldsymbol{s}.$$

ここで便宜的に $[f(\boldsymbol{a}_1) \cdots f(\boldsymbol{a}_n)]$ を $f(A)$ と表すと (通常 $(\prod_{i=1}^n f)(A)$ や $(f\times\cdots\times f)(A)$ と表すが略した)

[L4](ii) $\quad f(A\boldsymbol{s}) = f(A)\boldsymbol{s} \quad (f(A) := [f(\boldsymbol{a}_1) \cdots f(\boldsymbol{a}_n)])$

$H=[\boldsymbol{h}_1 \cdots \boldsymbol{h}_k]$ を $n\times k$ K-行列 とするとき, ベクトルの組 $AH=[A\boldsymbol{h}_1 \cdots A\boldsymbol{h}_n]$ についても,

$f(AH) = f([A\boldsymbol{h}_1 \cdots A\boldsymbol{h}_k]) := [f(A\boldsymbol{h}_1) \cdots f(A\boldsymbol{h}_k)] \overset{\text{[L4(ii)]}}{=} [f(A)\boldsymbol{h}_1 \cdots f(A)\boldsymbol{h}_k] = f(A)[\boldsymbol{h}_1 \cdots \boldsymbol{h}_k] = f(A)H$ より,

[L5] $\ f(AH) = f(A)H \quad (A=[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n],\ \ H=[\boldsymbol{h}_1 \cdots \boldsymbol{h}_k]$ ($n\times k$ 行列))

例 6 数ベクトル空間の間の線形写像 $f: K^n \to K^m$ $(V=K^n,\ W=K^m)$ は, 基本ベクトルの組 $[\boldsymbol{e}_1 \cdots \boldsymbol{e}_n]=E_n$ に対し, $\boldsymbol{h}_1=f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \boldsymbol{h}_n=f(\boldsymbol{e}_n)$, $H=[\boldsymbol{h}_1 \cdots \boldsymbol{h}_n]$ ($m\times n$ 行列) $(f(E_n) = H)$ とおくとき ,

$$f(\boldsymbol{x}) = H\boldsymbol{x} = f_H(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in K^n)$$

即ち, 数ベクトル空間の間の線型写像は行列によって表される.

$(\because)$ [L5] より $f(\boldsymbol{x}) = f(E_n\boldsymbol{x}) = f(E_n)\boldsymbol{x} = H\boldsymbol{x}$. より詳しくは $\boldsymbol{x} = {}^t[x_1 \cdots, x_n] = \boldsymbol{e}_1x_1+\cdots+\boldsymbol{e}_nx_n$ と [L4] より,

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{e}_1x_1+\cdots+\boldsymbol{e}_nx_n) \overset{\text{L4}}{=} f(\boldsymbol{e}_1)x_1+\cdots+f(\boldsymbol{e}_n)x_n = \boldsymbol{h}_1x_1+\cdots+\boldsymbol{h}_nx_n = H\boldsymbol{x}$$

線型写像の表現行列 一般の場合にも, 基底を定めれば線形写像は上の例 4 と同様にして, 次の様に行列で表される: 以下, V, W を K 上のベクトル空間, $A = [\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]$ を V の基底 $(\dim V = n)$, $B = [\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_m]$ を W の基底 $(\dim W = m)$, $f: V \to W$ を線形写像とする.

このとき, 各 $f(\boldsymbol{a}_j)$ は W のベクトルだから基底 $B = [\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_m]$ の一次結合で表せて,

$$f(\boldsymbol{a}_j) = \sum_{i=1}^m \boldsymbol{b}_i h_{ij} = \boldsymbol{b}_1 h_{1j}+\cdots+\boldsymbol{b}_m h_{mj} = [\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_m]\begin{bmatrix} h_{1j} \\ \vdots \\ h_{mj} \end{bmatrix} = B\boldsymbol{h}_j \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$H = [\boldsymbol{h}_1 \cdots \boldsymbol{h}_n] = [h_{ij}]$ ($m \times n$ 行列) とおけば,

$$f(A) = [f(\boldsymbol{a}_1)\, f(\boldsymbol{a}_2) \cdots f(\boldsymbol{a}_n)] = [B\boldsymbol{h}_1 \cdots B\boldsymbol{h}_n] = B[\boldsymbol{h}_1 \cdots \boldsymbol{h}_n] = BH. \qquad \therefore\ f(A) = BH$$

この行列 $H = H_f$ を 基底 A, B に関する f の**表現行列** という. f が一次変換 $f: V \to V$ のときは一組の基底 A に関する表現行列 $f(A) = AH$ を考え, n 次正方行列 H を, **一次変換** f の基底 A に関する**表現行列**という.

例 6 の行列 H は基底 E_n, E_m に関する線型写像 $f: K^n \to K^m$ の表現行列である.

注 表現行列 H は次の様に, $f(\boldsymbol{a}_1), \ldots, f(\boldsymbol{a}_n)$ を縦に並べ, 各 $f(\boldsymbol{a}_j)$ を横に展開してから**転置**しても求まる:

$$\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{a}_1) \\ \vdots \\ f(\boldsymbol{a}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 h_{11} + \boldsymbol{b}_2 h_{21} + \cdots + \boldsymbol{b}_m h_{m1} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ \boldsymbol{b}_1 h_{1n} + \boldsymbol{b}_2 h_{2n} + \cdots + \boldsymbol{b}_m h_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} & \cdots & h_{m1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1n} & h_{2n} & \cdots & h_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{bmatrix} = {}^tH{}^tB \quad \text{を転置して}$$

$$f(A) = [f(\boldsymbol{a}_1)\ f(\boldsymbol{a}_2)\ \cdots\ f(\boldsymbol{a}_n)] = BH = [\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots\ \boldsymbol{b}_m]\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mn} \end{bmatrix}$$

(例は別紙参照)