

同次連立一次方程式と列ベクトルの一次独立, 従属性

同次連立一次方程式 $Ax = 0$ は常に解 $x = 0$ をもつ. この解を $Ax = 0$ の **自明な解** という. 一般に, 関心があるのは自明でない解 $x \neq 0$ を持つ場合である. これについては定理 2.4 により次が成り立つ.

定理 2.5 (同次連立一次方程式の解) 未知数が n 個の同次連立一次方程式 $Ax = 0$ において

- (1) $Ax = 0$ が自明な解のみをもつ $\iff \text{rank } A = n$
 (2) $Ax = 0$ が自明でない解をもつ $\iff \text{rank } A < n$

♠ 同次方程式の解法例を参照のこと.

係数行列を $A = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$ と列ベクトルに分割して考えると, 方程式の左辺は次のようになる:

$$Ax = [a_1 \ \cdots \ a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \quad (x = {}^t[x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n])$$

一般にベクトルの組 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (平面・空間のベクトルの組でもよい) について,

$$a_1 t_1 + a_2 t_2 + \cdots + a_n t_n, \quad (=) \quad t_1 a_1 + t_2 a_2 + \cdots + t_n a_n \quad (t_1, t_2, \dots, t_n \text{ はスカラー}) \quad (1)$$

の形のベクトルを $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ の **一次結合**, または **線形結合** といい,

$$b = a_1 t_1 + a_2 t_2 + \cdots + a_n t_n, \quad b = t_1 a_1 + t_2 a_2 + \cdots + t_n a_n \quad (2)$$

のとき, b は $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ の一次結合で表せる, 又は一次結合であるという. また, 式

$$a_1 t_1 + a_2 t_2 + \cdots + a_n t_n = 0, \quad t_1 a_1 + t_2 a_2 + \cdots + t_n a_n = 0 \quad (3)$$

を **一次関係式**, または **線形関係式** といい, これが成り立つのが $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$, 即ち $t = {}^t[t_1 \ t_2 \ \cdots \ t_n] = 0$ の場合に限るとき, ベクトルの組 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ は **一次独立**, または **線形独立** であるという. 即ち,

$$a_1 t_1 + a_2 t_2 + \cdots + a_n t_n = 0 \implies t = {}^t[t_1 \ t_2 \ \cdots \ t_n] = 0$$

が成り立つとき $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ は一次独立 (線形独立) である.

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ は一次独立でないとき **一次従属**, または **線形従属** であるという. これは (3) 式をみたす t で $t \neq 0$ である ($\iff t_1, t_2, \dots, t_n$ のうち, 少なくとも 1 つは 0 でない) ものが存在する場合である. (ここでは「一次」と「線型」は同義語で, 英語では共に linear. 他の用語についても両方の呼び方がある. 例えば一次方程式は線型方程式ともいう.)

m 次元列ベクトルの n 個の組 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ に対し, $A = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$ ($m \times n$ 行列) とおくと, (1, 2, 3) 式は

$$(1) \quad a_1 t_1 + a_2 t_2 + \cdots + a_n t_n = At, \quad (2) \quad At = b, \quad (3) \quad At = 0$$

と表せ, (2,3) では t は方程式 $Ax = b$ や $Ax = 0$ の解になる.

(3) が自明な解 $x = t = 0$ のみをもつ $\iff \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ が一次独立, なので前定理より次を得る:

定理 2.6 (一次独立性と同次連立一次方程式) m 次元列ベクトルの n 個の組 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ に対し

$A = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$ ($m \times n$ 行列) とおくと,

- (1) b が $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ の一次結合で表せる. $\iff Ax = b$ が解をもつ. $\iff \text{rank}[A, b] = \text{rank } A$.
 (2) $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ が一次独立. $\iff Ax = 0$ は自明な解しかもたない. $\iff \text{rank } A = n$.
 (3) $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ が一次従属. $\iff Ax = 0$ は自明でない解をもつ. $\iff \text{rank } A < n$.

注意 1 記号 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ は順序を問題にしないベクトルの組を表す. ($\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{a_2, a_1, \dots, a_n\}$.) 一次結合の式や一次関係式においてはベクトルの並び順は問題にならないからである. これとは逆に, 列分割された行列は順序付けられたベクトルの組とみなされる. 尚, $\{ \}$ や $[\]$ を略して $a_1, a_2, \dots, a_n$ と表す.

例 1 (基本ベクトルの組) n 次元の基本ベクトルの組 $\{e_1, \dots, e_n\}$ については $[e_1 \ \cdots \ e_n] = E_n$ より

$e_1 t_1 + \cdots + e_n t_n = E_n t = t$. 即ち, $b = E_n b$ より任意の n 次元列ベクトル $b = {}^t[b_1 \ \cdots \ b_n]$ は

$$b = e_1 b_1 + \cdots + e_n b_n$$

と $\{e_1, \dots, e_n\}$ の一次結合で表せる. また $e_1 t_1 + e_2 t_2 + \cdots + e_n t_n = 0 \implies t = 0$. よって $e_1, e_2, \dots, e_n$ は一次独立である. また, この部分集合 $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$ も同様に一次独立である.

例 2 (基本解の一次独立性) 同次連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $r = \text{rank } A < n$ のとき $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 t_1 + \cdots + \mathbf{x}_{n-r} t_{n-r}$ と、前節で構成した基本解の一次結合で表される。また、 $X = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_{n-r}]$ の行を並べ替えると

$$X \mapsto Y = [\mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{y}_{n-r}] = \begin{bmatrix} -C \\ E_{n-r} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} E_{n-r} \\ -C \end{bmatrix}.$$

行を並べ替える操作は行交換を繰り返すことで得られ、各列を掃き出せば X の階段行列 $\begin{bmatrix} E_{n-r} \\ O \end{bmatrix}$ が得られる。よって $\text{rank } X = n-r =$ ベクトルの個数。従って定理 2.6 より この基本解 $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-r}\}$ は一次独立である。

次に、行列の中の軸列の組は一次独立であることをみる。これにより列ベクトルの組から一次独立なものを選び出すことができ、同時に、例の検算の項で見た様に、軸列でない列は $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の基本解を代入して移項することにより軸列の一次結合として一意的に表されることも分かる。即ち、一般に次が成り立つ。

♠ 連立一次方程式の計算例の検算の項参照

定理 2.7 (軸列の一次独立性) m 次元列ベクトルの組 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ に対し、 $A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$ ($m \times n$ 行列) とし、 A の階段行列を $PA = B = [b_{ij}]$ (P は正則行列)、階数を r 、軸列を $q_1, q_2, \dots, q_r$ とする、即ち

$$PA = B = [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{b}_n] = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_r & \cdots \\ \mathbf{e}_1 & * & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_r & \cdots \end{bmatrix}$$

とすると、 A の軸列 $\mathbf{a}_{q_1}, \mathbf{a}_{q_2}, \dots, \mathbf{a}_{q_r}$ (r 個) は一次独立であり、他の列 $\mathbf{a}_j$ は B の第 j 列 $\mathbf{b}_j$ の第 i 行までの成分を係数とする、 $\mathbf{a}_j$ より左側にある軸列の一次結合として一意的に表される、即ち

$$q_i < j < q_{i+1} \implies \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_{q_1} b_{1j} + \mathbf{a}_{q_2} b_{2j} + \cdots + \mathbf{a}_{q_i} b_{ij} = \sum_{k=1}^i \mathbf{a}_{q_k} b_{kj} \quad (i=1, \dots, r, q_{r+1}=n+1)$$

と一意的に表される。特に次が成り立つ。

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \text{ の中の一次独立なベクトルの組の最大個数} = \text{rank } A$$

証明 $PA = [P\mathbf{a}_1 \cdots P\mathbf{a}_n] = B = [\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_n]$ より $P\mathbf{a}_j = \mathbf{b}_j$ 。特に $P\mathbf{a}_{q_i} = \mathbf{b}_{q_i} = \mathbf{e}_i$ ($i=1, \dots, r$) が成り立つ。このとき A の軸列から作った行列 $[\mathbf{a}_{q_1} \cdots \mathbf{a}_{q_r}]$ に同じ行変形 ($=P$ を左から掛ける) を行えば次の形の階段行列になる：

$$P[\mathbf{a}_{q_1} \cdots \mathbf{a}_{q_r}] = [P\mathbf{a}_{q_1} \cdots P\mathbf{a}_{q_r}] = [\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_r] = \begin{bmatrix} E_r \\ O \end{bmatrix}$$

$\therefore \text{rank } [\mathbf{a}_{q_1} \cdots \mathbf{a}_{q_r}] = r$ (= 個数)。「個数=階数」より $\mathbf{a}_{q_1}, \dots, \mathbf{a}_{q_r}$ は一次独立。(定理 2.6)

$q_i < j < q_{i+1}$ のとき、 $[\mathbf{a}_{q_1} \cdots \mathbf{a}_{q_i} \mathbf{a}_j]$ は方程式 $\mathbf{a}_{q_1} x_1 + \mathbf{a}_{q_2} x_2 + \cdots + \mathbf{a}_{q_i} x_i = \mathbf{a}_j$ の拡大係数行列であり、同じ行変形を行えば、階段行列の定義より $\mathbf{b}_j$ の第 $i+1$ 行以下は $\mathbf{0}$ なので $\mathbf{b}_j$ の i 行目までを $\mathbf{b}'_j$ とすると

$$P[\mathbf{a}_{q_1} \cdots \mathbf{a}_{q_i} \mathbf{a}_j] = [\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_i \mathbf{b}_j] = \begin{bmatrix} E_i & \mathbf{b}'_j \\ O & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

従ってこの方程式は唯一の解 $\mathbf{x} = \mathbf{b}'_j$ をもち、これを代入すれば $\mathbf{a}_{q_1} b_{1j} + \mathbf{a}_{q_2} b_{2j} + \cdots + \mathbf{a}_{q_i} b_{ij} = \mathbf{a}_j \cdots (*)$ を得る。□

注意 階段行列 B の軸列でない第 j 列 $\mathbf{b}_j$ から構成された $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の基本解を $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ に代入すると $-\mathbf{a}_{q_1} b_{1j} - \mathbf{a}_{q_2} b_{2j} - \cdots - \mathbf{a}_{q_i} b_{ij} + \mathbf{a}_j = \mathbf{0}$ となるので、 $\mathbf{a}_j$ 以外を移項すれば前定理の式 (*) を得る。($\mathbf{a}_j$ の係数は 1.) このことは、 B の列を並び替えて $\begin{bmatrix} E_r & C \\ O & O \end{bmatrix}$ の形にして解を構成すると見易い。前定理の証明は、解を代入した形に影響を与えない $\mathbf{a}_j$ 以外の軸列でない列と、係数が 0 になる $\mathbf{a}_j$ より右の軸列を取り除いて考え、一意性の証明の為に $\mathbf{a}_j$ を定数項とみなしたものである。