基底と座標

以下, $K=\mathbb{C}$ 又は $\mathbb{R}$, V を K 上のベクトル空間とし, $A=[\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n]$, $B=[\boldsymbol{b}_1\,\boldsymbol{b}_2\,\cdots\,\boldsymbol{b}_\ell]$ は順序付けられた V のベクトルの組, $\boldsymbol{h}$. $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{x}$ 等は列ベクトルを表すことにする

このとき, A が V の基底 ([**B**] = [B1]+[B2]) $\iff$

[B1] (A は一次独立) $A\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}$.

[B2] (A は V の生成系) $V=\langle A\rangle$, 即ち, $\boldsymbol{b}\in V \Rightarrow \boldsymbol{b}=A\boldsymbol{s}$ となる $\boldsymbol{s}\in K^n$ がある.

基底の条件 [B] は次の [B3] と同値:

[B3] $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ が V の基底 $\iff$ V の各ベクトルは $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の一次結合として一意的に表される.

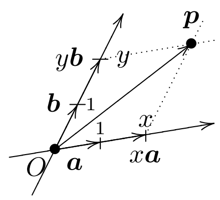
各 $\boldsymbol{b}\in V$ が $A=[\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n]$ の一次結合として一意的に表されるとは, ① : $\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{s}$ ($\boldsymbol{s}\in K^n$) と表せ, ② : $\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{t}$ ($\boldsymbol{t}\in K^n$) とも表せたとすると $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{t}$ が成り立つときを言う. ① は A が生成系であることを意味するので, 次を言えば良い.

[B1'] $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ が一次独立 $\iff$ $[A\boldsymbol{s}=A\boldsymbol{t} \implies \boldsymbol{s}=\boldsymbol{t}]$.

($\because$) ($\Rightarrow$) ① − ② より $\boldsymbol{0}=A\boldsymbol{s}-A\boldsymbol{t}=A(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t})$. $A=[\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n]$ が一次独立より $\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}$. よって $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{t}$.

($\Leftarrow$) $A\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}$ とすると, ($\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}$ として) $A\boldsymbol{s}=A\boldsymbol{0}$ $(=\boldsymbol{0})$ と, 2 通りに表せるが, 一意性により $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}$. よって A は一次独立. □

[座標] V に基底 $A=[\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n]$ が与えられれば, V のベクトル $\boldsymbol{b}$ は n 次元数ベクトル $\boldsymbol{s}={}^t[s_1\cdots s_n]\in K^n$ を用いて $\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{s}$ と一意的に表される. この数ベクトル $\boldsymbol{s}$ を $\boldsymbol{b}$ の, 基底 $A=[\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n]$ に関する **座標**, 又は**成分表示**といい, 各 s_i を**第 i 成分** (座標平面上のベクトルのときは x 成分, y 成分) という.



例 (幾何ベクトルの座標) 平面ベクトル $\boldsymbol{p}$ は基底 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ を用いて $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ と一意的に表せるので, $\boldsymbol{p}$ の基底 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に関する座標は ${}^t[x,y]$. この対応 $\boldsymbol{p}\to{}^t[x,y]$ は平面上の座標系を定めるが, 一般には直交していないので斜交座標系といわれる. 空間ベクトルでも同様.

例 (多項式の座標) n 次以下の多項式全体 $K[x]_n$ において, 多項式 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ の, 基底 $[x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1]$ に関する座標は ${}^t[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0]$ であり, 基底 $[1, x, \ldots, x^{n-1}, x^n]$ に関する座標は ${}^t[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n]$ である.

[B4] ([B1' の系]) $A=[\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n]$ が一次独立のとき, $n\times k$ K-行列 X, Y に対し $AX=AY \implies X=Y$.

($\because$) $X=[\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_k], Y=[\boldsymbol{y}_1\cdots\boldsymbol{y}_k]$ と列分割すれば $AX=[A\boldsymbol{x}_1\cdots A\boldsymbol{x}_k]=AY=[A\boldsymbol{y}_1\cdots A\boldsymbol{y}_k]$ より $A\boldsymbol{x}_j=A\boldsymbol{y}_j$. A が一次独立より $\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{y}_i$ $(i=1,\ldots,n)$ ([B1']). よって $X=Y$. 特に, $AX=[\boldsymbol{0}\cdots\boldsymbol{0}]\,(=AO)\Rightarrow X=O$.

• ベクトル空間 V に生成系 $A=[\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n]$ が与えられたとき, ベクトルの組 $B=[\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{b}_\ell]$ の各ベクトル $\boldsymbol{b}_j$ は $\boldsymbol{b}_j=A\boldsymbol{h}_j=\sum_{i=1}^n\boldsymbol{a}_ih_{ij}$ と表せるので, $H:=[h_{ij}]$ ($n\times\ell$ K-行列) とおけば B は $B=AH$ と表せ, A が基底であれば [B4] より H は一意的に定まる:

$$B=[\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{b}_\ell]=[A\boldsymbol{h}_1\cdots A\boldsymbol{h}_\ell]=A[\boldsymbol{h}_1\cdots\boldsymbol{h}_\ell]=AH, \qquad \boldsymbol{b}_j=A\boldsymbol{h}_j=\sum_{i=1}^n\boldsymbol{a}_ih_{ij}\quad(j=1,\ldots,\ell).$$

注 (一次関係式) A が V の基底のとき, $B=AH$ と H は, [B3],[B4] より同じ一次関係式をもつ, 即ち, $\boldsymbol{s}\in K^k$ に対し, $B\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow H\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}$. 従って, B が一次従属 (一次独立) $\Leftrightarrow$ H が一次従属 (一次独立).

[基底の変換行列] $A=[\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n]$, $B=[\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{b}_n]$ をともに V の基底とすると $B=AP$, $A=BQ$, (P, Q は n 次正方 K-行列) と表される. $AE=A=BQ=(AP)Q=A(PQ)$ で A が一次独立なので, [B4] より $E=PQ$. $\therefore P$ は正則で $Q=P^{-1}$. この P を **基底** A から **基底** B への**変換行列**, **基底変換の行列**, または基底の取替え $A\to B$ の行列という. B から A への変換行列は $Q=P^{-1}$. P の成分 p_{ij} は次式から求められる:

$$[\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{b}_n]=B=AP=[\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n][p_{ij}],\quad \boldsymbol{b}_j=\sum_{i=1}^n\boldsymbol{a}_ip_{ij}=\boldsymbol{a}_1p_{1j}+\cdots+\boldsymbol{a}_np_{nj}$$

• A, B, C が基底, $B=AP$, $C=BQ$ なら $C=(AP)Q=A(PQ)$ より A から C への変換行列は PQ.

注意 基底の変換行列は次の様にしても求まる. 上の式を縦に $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ の順に並べると,

$$\begin{cases}\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1p_{11}+\boldsymbol{a}_2p_{21}+\cdots+\boldsymbol{a}_np_{n1}\\ \boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1p_{12}+\boldsymbol{a}_2p_{22}+\cdots+\boldsymbol{a}_np_{n2}\\ \quad\vdots\\ \boldsymbol{b}_n=\boldsymbol{a}_1p_{1n}+\boldsymbol{a}_2p_{2n}+\cdots+\boldsymbol{a}_np_{nn}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{b}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_{11}&p_{21}&\cdots&p_{n1}\\ p_{12}&p_{22}&\cdots&p_{n2}\\ \vdots&&\ddots&\vdots\\ p_{1n}&p_{2n}&\cdots&p_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{a}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}={}^tP\,{}^tA$$

即ち, ${}^t(AP)$ が得られるので, これを転置して AP および P を得る.

[座標変換] A, B が V の基底なら, $\boldsymbol{c}\in V$ は $\boldsymbol{c}=A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{c}=B\boldsymbol{y}$ と表されるが, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}=B\boldsymbol{y}=AP\boldsymbol{y}$ と [B3] より

$$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}. \qquad (\therefore\ \boldsymbol{y}=P^{-1}\boldsymbol{x})$$

即ち, 基底変換の行列を用いて**座標変換**の式が得られる. (変数変換の式としては, $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{y}$ で表す方が扱いやすい.)

例 (K^n の基底変換) $A=[\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n]$ が K^n の基底のとき, 正則行列 A は $A=E_nA$ より標準基底 E_n から基底 A への変換行列と考えられ, A から E_n への変換行列は逆行列 A^{-1} である. $B=[\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{b}_n]$ も K^n の基底なら, $B=A(A^{-1}B)$ より基底 A から基底 B への変換行列は $A^{-1}B$ になる.

[例題](基底変換 1) $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組 $A=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3]$, $B=[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3]$ を次の様に定める：

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_3=\begin{bmatrix}3\\2\\4\end{bmatrix}.$$

(1) $A,\ B$ はともに $\mathbb{R}^3$ の基底になることを示せ. (2) $\boldsymbol{b}_1$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ の一次結合で表せ.
(3) A から B への基底の変換行列 P $(B=AP)$ を求めよ.

解: (1) $\det A=1$, $\det B=-1$ より A,B は正則. よって A,B は基底になる.

(2), (3) を同時に求める. $[A,\,B]$ を行基本変形して階段行列を作る.

$$[A,\,B]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&2&1&3\\2&-1&1&1&1&2\\0&2&1&3&2&4\end{array}\right]\mapsto[E,\,A^{-1}B]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&-1&-1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&3&0&4\end{array}\right]\quad\therefore\ P=A^{-1}B=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\0&1&0\\3&0&4\end{bmatrix}$$

と P が求まる. この第１列は $A^{-1}\boldsymbol{b}_1={}^t[-1,0,3]$ で, これは $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$ の解, 即ち $\boldsymbol{b}_1=A(A^{-1}\boldsymbol{b}_1)=-1\boldsymbol{a}_1+0\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_3$.

- A を基底, P を正則行列とし, $B=AP$ とするとき, $\boldsymbol{c}=B\boldsymbol{y}$ となる $\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{y}=P^{-1}\boldsymbol{x}$ により一意的に定まるので [B3] より B は基底になる.

[例題](基底変換 2) ２次以下の実係数多項式 $p(x)=ax^2+bx+c$ 全体のつくるベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_2$ において, $p_0(x)=-1,\ p_1(x)=x+3,\ p_2(x)=(x+1)^2$ とするとき,
(1) $[p_0(x),\,p_1(x),\,p_2(x)]$ は $\mathbb{R}[x]_2$ の基底になることを示せ.
(2) 基底 $[1,\,x,\,x^2]$ から $[p_0(x),\,p_1(x),\,p_2(x)]$ への変換行列を求めよ.

解: 変換行列を求め, それが正則であることを示す.

$$[p_0(x),\,p_1(x),\,p_2(x)]=[-1,\,3{+}x,\,1{+}2x{+}x^2]=[1,\,x,\,x^2]\begin{bmatrix}-1&3&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\ \text{より}\ P=\begin{bmatrix}-1&3&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}.\ |P|=-1\ \text{より}\ P\ \text{は正則}.$$

$\therefore$ $[p_0(x),\,p_1(x),\,p_2(x)]$ は $\mathbb{R}[x]_2$ の基底になり, P は変換行列. なお, P は次の様にしても求まる：

$$\begin{bmatrix}p_0(x)\\p_1(x)\\p_2(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\3+x\\1+2x+x^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\3&1&0\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\x\\x^2\end{bmatrix}.\ \text{転置して}\ [p_0(x),\,p_1(x),\,p_2(x)]=[1,\,x,\,x^2]\begin{bmatrix}-1&3&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\ \text{より}\ P=\begin{bmatrix}-1&3&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

.

問 1 次の $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組 $A=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3]$, $B=[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3]$ について：

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_3=\begin{bmatrix}7\\9\\6\end{bmatrix}.$$

(1) $A,\ B$ はともに $\mathbb{R}^3$ の基底になることを示せ. (2) $\boldsymbol{b}_3$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ の一次結合で表せ. (座標を求めても良い.)
(3) A から B への基底の変換行列 P $(B=AP)$ を求めよ.

問 2 次の $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 A から B への変換行列を求めよ.
(1) $A=[x^2,x,1]$, $B=[1,x,x^2]$
(2) $A=[1,x,x^2]$, $B=[x^2{+}3x{-}2,\ 2x^2{+}6x{-}3,\ -2x^2{-}5x{+}2]$
(3) $A=[x^2{+}3x{-}2,\ 2x^2{+}6x{-}3,\ -2x^2{-}5x{+}2]$, $B=[x^2{+}x,\ x^2{+}1,\ x{+}1]$