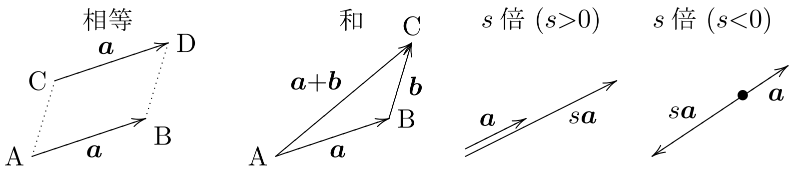
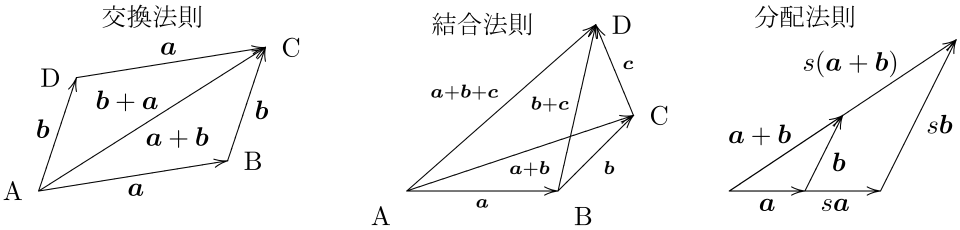
幾何ベクトルと数ベクトル

幾何ベクトル (高校の数学 B 参照) 平面や空間内の, 有向線分 AB において, その位置を無視して **長さ** (大きさ) と **向き** だけで決まる量を**幾何ベクトル**といい, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ や $\boldsymbol{a}$ で表す. AB が平行移動により CD に移るとき $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とする. $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ を**零ベクトル**といい $\mathbf{0}$ で表す. $\mathbf{0}$ の向きは考えない. 和が $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で定められ, 実数 s に対し $\boldsymbol{a}$ の s 倍が, $s > 0$ のときは方向が同じで長さが s 倍, $s < 0$ のときは方向が逆で長さが $|s|$ 倍のベクトルで, $s = 0$ のときは $0\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ と定められる. また, $s\mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{a}s = s\boldsymbol{a}$ とする. $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = (-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ である.



これらの演算が交換法則, 結合法則, 分配法則をみたす事は図を描くことにより確かめられる.



平面, 空間の幾何ベクトル全体の集合を**幾何ベクトル空間**といい, ここではそれぞれ V^2, V^3 と表す. 以下, 原点を O とし, 幾何ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を点 A とみなす. このとき V^2, V^3 は平面や空間とみなされる. 座標平面上の幾何ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ は, A の座標を (a_1, a_2) とすれば, 列ベクトル $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ や行ベクトル $[a_1, a_2]$ に対応する. 同様に, 座標空間内の幾何ベクトルは 3 次元の数ベクトルに対応し, 幾何ベクトルの演算も数ベクトルの演算に対応する.

数ベクトル空間 $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ でそれぞれ**複素数体**, **実数体**, **有理数体** ($\mathbb{Z}$ で (有理) **整数環**) を表す.

n 次元列ベクトル全体の集合を $\mathbb{C}^n$ と表す. $\mathbb{C}^n$ には行列としての和, 複素数倍が定められており, 複素数上 ($\mathbb{C}$ 上) の n 次元**列ベクトル空間**という. 全ての成分が実数である n 次元列ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^n$ と表す. $\mathbb{R}^n$ は行列としての和, 実数倍で閉じており, スカラー倍としては実数倍のみを考え, 実数上 ($\mathbb{R}$ 上) の n 次元**列ベクトル空間**という. n 次元行ベクトル全体の集合も同様に $\mathbb{C}$ 上または $\mathbb{R}$ 上の n 次元行ベクトル空間といい, これらを総称して n **次元数ベクトル空間**, または略して**数空間**という. 集合の記号を用いて表せば,

$$\mathbb{C}^n := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| \; x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C} \right\}, \qquad \mathbb{R}^n := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| \; x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

• 以下, 記法を一貫させる為に数ベクトルとしては列ベクトルを用いる.
この記号を用いれば, 座標平面は $\mathbb{R}^2$, 座標空間は $\mathbb{R}^3$ と表される.

以下, $\mathbb{C}$ 上と $\mathbb{R}$ 上で二重に述べるのを避ける為, K を $\mathbb{C}$ 又は $\mathbb{R}$ とし, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$ を K^n と表す.
これらは前期に述べた, 数の和・積の基本性質 (体の公理) から導かれる行列の和とスカラー倍の性質を満たしている. 即ち, 幾何ベクトル空間も含め V と表すとき次の性質 **[V]** (**ベクトル空間の公理** という) をもっている:

ベクトル空間の公理 [V]

$K = \mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ とし, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ とするとき
[V1] 和について: (i)(結合法則) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, (ii) (交換法則) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,
(iii) (零ベクトルの存在) 全 $\boldsymbol{a} \in V$ に対し $\boldsymbol{a}+\mathbf{0} = \boldsymbol{a}$ となる $\mathbf{0} \in V$ が (唯 1 つ) ある,
(iv) (逆ベクトルの存在) 各 $\boldsymbol{a} \in V$ に対し $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{b} \in V$ が (唯 1 つ) ある.
この $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$ の**逆ベクトル**といい, $-\boldsymbol{a}$ と表す. ($\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$.) 差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ と定める.
[V2] スカラー倍について: $s, t \in K$ に対し, $\boldsymbol{a}s = s\boldsymbol{a}$ であり,
(i) (結合法則) $(st)\boldsymbol{a} = s(t\boldsymbol{a})$, (ii) (単位性) $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$,
[V3] (i) (分配法則 1) $s(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = s\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}$, (ii) (分配法則 2) $(s+t)\boldsymbol{a} = s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{a}$.

この様な和, スカラー倍が定められる集合は $m \times n$ 行列全体の集合を含め沢山ある. そこで,

一般に, 集合 V の各元 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に, 和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in V$ とスカラー倍 $s\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}s \in V$ $(s \in K)$ が定められていて上の公理 **[V]** をみたすとき, V を K 上の **ベクトル空間** (vector space), あるいは**線型空間** (linear space) であるとい

い, $K=\mathbb{C}$ のとき V を**複素ベクトル空間 (複素線形空間)**, $K=\mathbb{R}$ のとき V を**実ベクトル空間 (実線形空間)** という. また, ベクトル空間の元を **ベクトル** (vector) という.

公理 [**V**] により一般のベクトルの演算も数ベクトルの演算と同様の性質をもつ. 特に次が成り立つ:

$$[\mathbf{V2}]\ \text{(iii)}\ \ 0\boldsymbol{a}=\mathbf{0},\ s\mathbf{0}=\mathbf{0},\ (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}. \quad [\mathbf{V4}]\ \left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}_i s_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m}t_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{a}_i s_i t_j.$$

数空間 K^n は K 上の, 幾何ベクトル空間 V^2, V^3 は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である. 実行列を $\mathbb{R}$-行列, 複素行列を $\mathbb{C}$-行列と書き, これらを K-行列と表すとき, $m\times n$ K-行列全体 $M_{m.n}(K)$, 特に n 次正方 K-行列全体 $M_n(K)$ は行列の和・スカラー倍により K 上のベクトル空間になる. また, K 係数多項式全体の集合 $K[x]$ も多項式の和・定数倍により K 上のベクトル空間になる. 特に, 零ベクトルは定数 0 である. ここで, 定数も多項式の一種と考えている.

[復習] 一次結合, 一次独立, 一次従属 ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ とスカラー $s_1,\dots,s_n$ について,

$s_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+s_n\boldsymbol{a}_n$, $(=)$ $\boldsymbol{a}_1s_1+\cdots+\boldsymbol{a}_ns_n\ (=\boldsymbol{b})$ の形のベクトルを $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ の**一次 (線型) 結合**,

$\boldsymbol{a}_1s_1+\cdots+\boldsymbol{a}_ns_n=\mathbf{0}\Rightarrow s_1=\cdots=s_n=0$ が成り立つとき $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ は**一次 (線型) 独立**,

そうでないとき ($\boldsymbol{a}_1s_1+\cdots+\boldsymbol{a}_ns_n=\mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{s}={}^t[s_1\cdots s_n]\neq\mathbf{0}$ があるとき) **一次 (線型) 従属**と呼んだ.

これらの用語は一般のベクトルの組にも適用される. V のベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n$ の順序を付けた組を $[\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\cdots\,\boldsymbol{a}_n]$ や $[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]$ で表す. また, 順序を問題にしない組を $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \dots,\ \boldsymbol{a}_n\}$ で表し, これらを略して $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n$ とも表す. V のベクトルの組 $A=[\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n]$, $B=[\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{b}_n]$ と列ベクトル $\boldsymbol{s}={}^t[s_1\cdots s_n]\in K^n$ と $n\times\ell$ K-行列 $H=[\boldsymbol{h}_1\cdots\boldsymbol{h}_\ell]=[h_{ij}]$ に対し, $A{+}B:=[\boldsymbol{a}_1{+}\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{a}_n{+}\boldsymbol{b}_n]$, $As:=[\boldsymbol{a}_1s\cdots\boldsymbol{a}_ns]\ (=)\ sA:=[s\boldsymbol{a}_1\cdots s\boldsymbol{a}_n]\ (s{\in}K)$,

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{s} &= [\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix}s_1\\ \vdots\\ s_n\end{bmatrix}:=\boldsymbol{a}_1s_1+\cdots+\boldsymbol{a}_ns_n=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}_is_i=\sum_{i=1}^{n}s_i\boldsymbol{a}_i,\\ AH &= A[\boldsymbol{h}_1\cdots\boldsymbol{h}_\ell]:=[A\boldsymbol{h}_1\cdots A\boldsymbol{h}_\ell] \qquad (\ell\ \text{個の}\ V\ \text{のベクトルの組}) \end{aligned}$$

と定める. このとき $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$ の**一次結合**は $A\boldsymbol{s}$ と表される. 従って,

- $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$ の一次結合 $\iff$ $\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{s}$ となる $\boldsymbol{s}\in K^n$ がある.
- $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$ は **一次独立** $\iff$ $A\boldsymbol{s}=\mathbf{0}$ ならば $\boldsymbol{s}=\mathbf{0}$.
- $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$ は **一次従属** $\iff$ $A\boldsymbol{s}=\mathbf{0}$ をみたす $\boldsymbol{s}\neq\mathbf{0}$ がある.

m 次元列ベクトルの n 個の組 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ に対し, $A=[\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\cdots\boldsymbol{a}_n]$ は $m\times n$ 行列とみなされ,

一次独立性と同次連立一次方程式 (定理 2.6)

(1) $\boldsymbol{b}$ が $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ の一次結合で表せる $\Leftrightarrow$ $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解をもつ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}\,[A,\boldsymbol{b}]=\mathrm{rank}\ A$

(2) $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ が一次独立 $\Leftrightarrow$ $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ は自明な解しかもたない $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}\ A=n$ (= 個数)

(3) $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ が一次従属 $\Leftrightarrow$ $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ は自明でない解をもつ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}\ A<n$

軸列の一次独立性 (定理 2.7)

A の階段行列を $PA=B=[b_{ij}]$ (P は正則行列), 階数を r, 軸列を $q_1,q_2,\dots,q_r$ とするとき, A の軸列 $\boldsymbol{a}_{q_1},\boldsymbol{a}_{q_2},\dots,\boldsymbol{a}_{q_r}$ (r 個) は一次独立であり, 他の列 $\boldsymbol{a}_j$ は, B の第 j 列 $\boldsymbol{b}_j$ の成分を係数とする, $\boldsymbol{a}_j$ より左側にある軸列の一次結合として一意的に表される. 特に,

$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n$ の中の一次独立なベクトルの組の最大個数 $=\mathrm{rank}\ A$

♠ 前期の復習

一般の V のベクトルの組についても行列と同様の演算法則が成り立ち, 列分割された行列と同様に取り扱える. 例えば次が成り立つ:

ベクトルの組と行列の積の結合法則, 分配法則

n 個のベクトルの組 A,B, $n\times\ell$ K-行列 H,H' と $\ell\times k$ K-行列 S に対し,

(1) $(AH)S=A(HS)$, (2) $A(H+H')=AH+AH'$, (3) $(A+B)H=AH+BH$.

証明 (1): $H=[\boldsymbol{h}_1\cdots\boldsymbol{h}_\ell]=[h_{ij}]$, $S=\boldsymbol{s}={}^t[s_1\cdots s_\ell]\in K^\ell$ $(k=1)$ のとき, $(AH)\boldsymbol{s}=[A\boldsymbol{h}_1\cdots A\boldsymbol{h}_\ell]\boldsymbol{s}$ $=\displaystyle\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{a}_ih_{ij})s_j=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}_i(\sum_{j=1}^{\ell}h_{ij}s_j)=A(H\boldsymbol{s})$. $S=[\boldsymbol{s}_1\cdots\boldsymbol{s}_k]$ のとき, 各列について $(AH)\boldsymbol{s}_j=A(H\boldsymbol{s}_j)$ が成り立つので $(AH)S=[(AH)\boldsymbol{s}_1\cdots(AH)\boldsymbol{s}_k]=[A(H\boldsymbol{s}_1)\cdots A(H\boldsymbol{s}_k)]=A(HS)$. 他も同様.