ユニタリー行列による正規行列の対角化のまとめ

n 次正規行列 A $(A^*A = A\,A^*)$ をユニタリー行列 U で対角化する方法：

(1) 固有方程式 $f_A(x) = |xE - A| = 0$ を解いて固有値を全て求める.
($(-1)^n f_A(x) = |A - xE| = 0$ 解いても良い.)

(2) 各固有値 β_i に対し,
同次方程式 $(A - \beta_i E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて, この方程式の基本解 $= W_{\beta_i}$ の基底 を求める.

(3) (2) で求めた基本解からシュミットの直交化法により正規直交系を作る.

(4) (3) で求めた正規直交系をなすベクトルは全部で n 個あり，これらをすべて並べると n 次ユニタリー行列 U になり， $U^{-1}AU = U^*AU$ は対角行列になる.

例 1 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $({}^tA = A)$ を直交行列で対角化する.

(I) $|xE - A| = (x+2)(x-1)^2$. $\therefore\ \alpha = -2, 1, 1.$ $\beta = -2, 1$ (重根)

(II-1) $\beta = -2$ のとき,

$$(A+2E) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore\ \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$W_{-2} = \langle \boldsymbol{p}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1 \rangle$.

(II-2) $\beta = 1$ (重根) のとき,

$$(A-E) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore\ \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ W_1 = \langle \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3 \rangle.$$

$\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ からシュミットの直交化法で W_1 の正規直交基底を作る:

$$\|\boldsymbol{p}_2\|^2 = 2, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_3' = \boldsymbol{p}_3 - \frac{(\boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_2)}{\|\boldsymbol{p}_2\|^2}\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_3 - \frac{-1}{2}\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|^2 = 6, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ は直交している (はず $\because$ 定理 6.9) ので $U = [\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_2\,\boldsymbol{u}_3]$ は直交行列になる ($\because$ 定理 5.9). このとき, $U^{-1}AU$ は $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ に対応する固有値 $-2, 1, 1$ をこの順に対角線に並べた対角行列である. これらは

$$U = (\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_2\,\boldsymbol{u}_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad U^{-1}AU = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[検算] 1. 行列の対角化のときと同じく, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ を元の方程式に代入して検算する. 特にシュミットの直交化を行った $\boldsymbol{u}_3$ （の定数倍）を元の方程式 $(A - \beta E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に代入して検算する.
2. $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ の (定数倍の) 内の 2 つの内積が 0 になることを確かめる.

例 2　行列 $A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$ は正規行列であることを示し，ユニタリー行列で対角化する.

$$A^*={}^tA=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix},\quad {}^tA\,A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}=A\,{}^tA$$

より，A は正規行列.

(1) $|xE-A|=x^2-2x+2.\ \therefore \beta=1+i,\ 1-i.$

(II-1) $\beta=1+i$ のとき，

$$A-(1+i)E=\begin{bmatrix}-i&-1\\1&-i\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&-i\\0&0\end{bmatrix}\quad\therefore\ \boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix},\ \ \boldsymbol{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}.$$

(II-2) $\beta=1-i$ のとき，

$$A-(1-i)E=\begin{bmatrix}i&-1\\1&i\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&i\\0&0\end{bmatrix}\quad\therefore\ \boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}-i\\1\end{bmatrix},\ \ \boldsymbol{u}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-i\\1\end{bmatrix}.$$

($(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)=i\cdot i+1\cdot 1=0$ より $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ は直交していることが確かめられて,)

$$U=[\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_2]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i&-i\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{i}{\sqrt{2}}&\frac{-i}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\ \ \text{とおけば,}\quad U^{-1}AU=U^*AU=\begin{bmatrix}1+i&0\\0&1-i\end{bmatrix}$$

行列の対角化の問題

(1) 次の実対称行列 A を直交行列で対角化せよ. 即ち, $U^{-1}AU=D$ となる様な直交行列 U と対角行列 D を求めよ.

$$A=\begin{bmatrix}-1&2&-2\\2&-1&2\\-2&2&-1\end{bmatrix}\ .$$

(2) 次の行列 A は正規行列であることを示し, A をユニタリー行列で対角化せよ. 即ち, $U^{-1}AU=D$ となる様なユニタリー行列 U と対角行列 D を求めよ.

$$A=\begin{bmatrix}1&-i\\i&1\end{bmatrix}$$