

$\mathbf{a} = {}^t[a_1 \cdots a_n], \mathbf{b} = {}^t[b_1 \cdots b_n] \in \mathbb{C}^n$  の標準内積  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbb{C}^n}$  と  $\mathbf{a}$  の長さ  $\|\mathbf{a}\|$  は:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbb{C}^n} := \overline{a_1}b_1 + \cdots + \overline{a_n}b_n = \sum_{i=1}^n \overline{a_i}b_i = \mathbf{a}^* \mathbf{b} = \overline{\mathbf{b}^* \mathbf{a}},$$

$$\|\mathbf{a}\|^2 := |a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2 = \sum_{i=1}^n \overline{a_i}a_i = (\mathbf{a}, \mathbf{a})_{\mathbb{C}^n}, \quad \|\mathbf{a}\| := \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$$

内積の公理 [I]:

[I1] (エルミート性)  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \overline{(\mathbf{b}, \mathbf{a})}$ . (実ベクトルでは [I1] $_{\mathbb{R}}$  (対称性)  $\overline{(\mathbf{b}, \mathbf{a})} = (\mathbf{b}, \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .)

[I2] (線型性) (i)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$ . (ii)  $(\mathbf{a}, s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  ( $s \in \mathbb{C}$ ).

[I3] (正値性)  $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$  は実数で  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0$ ,  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

([I1], [I2] より [I2'] (共役線型性) (i)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$ . (ii)  $(s\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \overline{s}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , ( $s \in \mathbb{C}$ )).

ノルム (長さ, 大きさ):  $\|\mathbf{a}\| := \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$ . ( $\|\mathbf{a}\|^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0$ )

例 1 ( $\mathbb{C}^3$  の標準内積)  $\mathbf{a} = {}^t[1, 2, 3i], \mathbf{b} = {}^t[3, 2i, 1]$  に対し,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \overline{1} \cdot 3 + \overline{2} \cdot 2i + \overline{3i} \cdot 1 = 3 + 4i - 3i = 3 + i, \quad (\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \overline{3} \cdot 1 + \overline{2i} \cdot 2 + \overline{1} \cdot 3i = 3 - 4i + 3i = 3 - i = \overline{(\mathbf{a}, \mathbf{b})},$$

$$\|\mathbf{a}\|^2 = 1^2 + 2^2 + |3i|^2 = 1 + 4 + 9 = 14, \quad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{14}, \quad \|\mathbf{b}\|^2 = 3^2 + |2i|^2 + 1^2 = 9 + 4 + 1 = 14, \quad \|\mathbf{b}\| = \sqrt{14}.$$

[直交化法] 一次独立な  $[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k]$  より, 直交系  $[\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k]$  と 正規直交系  $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k]$  を

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - b_1 \frac{(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}, \quad \dots, \quad \mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k - b_1 \frac{(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_k)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)} - \cdots - b_{k-1} \frac{(\mathbf{b}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}{(\mathbf{b}_{k-1}, \mathbf{b}_{k-1})}, \quad \mathbf{u}_i = \frac{1}{\|\mathbf{b}_i\|} \mathbf{b}_i.$$

と直交化法により計算する際, 次のことに注意する.  $s \neq 0$  のとき, 内積と長さの性質により

$$bs \frac{(\mathbf{b}s, \mathbf{a})}{(\mathbf{b}s, \mathbf{b}s)} = b \frac{s\overline{s}(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{s\overline{s}(\mathbf{b}, \mathbf{b})} = b \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{(\mathbf{b}, \mathbf{b})}. \quad \|\mathbf{b}s\| = \|\mathbf{b}\||s|, \quad s > 0 \text{ のとき } |s| = s \text{ より } \mathbf{u} = \frac{\mathbf{b}s}{\|\mathbf{b}s\|} = \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}$$

即ち, 直交系  $[\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{k-1}]$  から  $\mathbf{b}_k$  を計算する際に, 各  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{k-1}$  をそれらの定数倍  $\mathbf{b}'_i = \mathbf{b}_i s_i$  ( $s_i \neq 0$ ) に置き換えても同じ  $\mathbf{b}_k$  が得られ,  $s_i > 0$  なら  $\mathbf{b}'_i$  を正規化しても同じ  $\mathbf{u}_i$  を得る.

例題  $\mathbf{a}_1 = {}^t[1, 1, 0], \mathbf{a}_2 = {}^t[1, 0, 1], \mathbf{a}_3 = {}^t[0, 1, 1]$  をこの順で正規直交化する:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = {}^t[1, 1, 0], \quad (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) = 2, \quad (\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2) = 1,$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{b}_1 = {}^t[1, 0, 1] - \frac{1}{2}{}^t[1, 1, 0] = \frac{1}{2}{}^t[1, -1, 2],$$

$$\mathbf{b}'_2 = {}^t[1, -1, 2] \text{ とおくと } ((\mathbf{b}'_2, \mathbf{b}_1) = 0 \text{ で}) \quad (\mathbf{b}'_2, \mathbf{b}'_2) = 6, \quad (\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_3) = 1, \quad (\mathbf{b}'_2, \mathbf{a}_3) = 1,$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{b}_1 - \frac{1}{6}\mathbf{b}'_2 = {}^t[0, 1, 1] - \frac{1}{2}{}^t[1, 1, 0] - \frac{1}{6}{}^t[1, -1, 2] = \frac{1}{6}{}^t[-4, 4, 4] = \frac{2}{3}{}^t[-1, 1, 1]$$

$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}'_2, \mathbf{b}'_3 = {}^t[-1, 1, 1]$  について,  $(\mathbf{b}'_2, \mathbf{b}_1) = (\mathbf{b}'_3, \mathbf{b}_1) = (\mathbf{b}'_3, \mathbf{b}'_2) = 0$ . これらを正規化して,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{b}'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{b}'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$U = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$U$  は直交行列になり,  $U$  の逆行列は  $U^{-1} = {}^tU$  となる.

問題:  $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1$  の順で正規直交化せよ.

行列の内積  $m \times n$  行列  $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$  の標準内積と  $\text{norm}^2$  は次の形に表せる:  $((C)_{ij} = C$  の  $(i, j)$  成分)

$$(A, B) := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \overline{a_{ij}}b_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (A^*)_{ji}(B)_{ij} = \sum_{j=1}^n (A^*B)_{jj} = \text{tr}(A^*B), \quad \|A\|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 = \text{tr}(A^*A).$$

### 関数空間上の内積

$C^0([a, b], \mathbb{R})$  を閉区間  $[a, b]$  上の実数値連続関数全体の作るベクトル空間とし, 内積  $(f, g)$  を

$$(f, g) := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

で定めると, [I1] $_{\mathbb{R}}$  は  $g(x)f(x) = f(x)g(x)$  より, [I2] は積分の線型性 (微分積分学の教科書参照) より,

[I3] は,  $h(x) := f(x)^2 \geq 0$  より  $(f, f) = \int_a^b f(x)f(x)dx = \int_a^b h(x)dx \geq 0$  であり, 連続関数  $h(x) \geq 0$  については  $\int_a^b h(x)dx = 0 \iff h(x) \equiv 0$  (微分積分学の教科書参照) が成り立つことにより内積になる.

$\mathbb{R}$  や閉区間  $[a, b]$  上の複素数値関数  $f(x)$  は実数値関数  $g(x), h(x)$  により  $f(x) = g(x) + ih(x)$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) と表せ, その積分, 微分は実部と虚部を積分, 微分することにより得られる:

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b g(x)dx + i \int_a^b h(x)dx \quad \left( \frac{df}{dx}(x) := \frac{dg}{dx}(x) + i \frac{dh}{dx}(x) \right)$$

$[a, b]$  上の複素数値連続関数全体  $C^0([a, b], \mathbb{C})$  には内積  $(f, g)$ , ノルム  $\|f\|$  が次式で与えられる:

$$(f, g) := \int_a^b \overline{f(x)}g(x)dx, \quad \|f\|^2 = (f, f) := \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

直交関数系 (線型 p183)

**例 1 (三角関数の直交性)** 三角関数  $\cos nx, \sin nx$  を 1 周期区間  $[-\pi, \pi]$  (又は  $[0, 2\pi]$ ) 上で考えると次の様に,  
 $1 = \cos 0x, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$  は直交系になる:

内積  $(\cos mx, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx$  等は, 加法定理より得られる積和公式:

$$\begin{aligned} \cos mx \cos nx &= (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)/2, & \sin mx \sin nx &= (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)/2, \\ \cos mx \sin nx &= (\sin(m+n)x - \sin(m-n)x)/2 \end{aligned}$$

を用いると, 三角関数の 1 周期積分  $= 0$  ( $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$  ( $n \geq 1$ )) より  $m, n \geq 0, m \neq n$  のとき

$$\begin{aligned} (\cos mx, \cos nx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) dx = 0, \\ (\sin mx, \sin nx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) dx = 0, \\ (\cos mx, \sin nx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(m+n)x - \sin(m-n)x) dx = 0 \end{aligned}$$

なので互いに直交する.  $\|\cos nx\|^2, \|\sin nx\|^2$  は上の 2 式で  $m=n \geq 1$  のとき共に  $\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 0x dx = \pi$  より

$$\|\cos nx\|^2 = \|\sin nx\|^2 = \pi, \quad \|\cos nx\| = \|\sin nx\| = \sqrt{\pi}, \quad \|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi, \quad \|1\| = \sqrt{2\pi}.$$

$$\therefore c_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad c_n(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \quad s_n(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \quad (n=1, 2, \dots)$$

は正規直交系になる.

$f(x) \in C^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  の  $\langle \cos nx \rangle, \langle \sin nx \rangle$  への射影の係数  $(f, \cos nx)/\|\cos nx\|^2, (f, \sin nx)/\|\sin nx\|^2$  は,

$$a_0(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n=1, 2, \dots)$$

と表され,  $f(x)$  の Fourier(フーリエ) 係数といわれる.  $f(x)$  の  $\langle 1, \cos x, \sin x, \dots, \cos mx, \sin mx \rangle$  への射影は:

$$a_0(f) + \sum_{n=1}^m (a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx) (= f_m(x)) \text{ で, } (f_{\infty}(x) := a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx))$$

は  $f(x)$  の **Fourier(フーリエ) 級数** といわれ, 級数  $f_{\infty}(x)$  が収束して  $f_{\infty}(x) = f(x)$  となるとき  $f(x)$  の **Fourier(フーリエ) 展開** といわれる. ( $f(x)$  が  $C^1$  級の場合は  $f_{\infty}(x) = f(x)$  となる事が知られている.)

Euler (オイラー) の公式:  $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$  により複素形で考えると,  $\overline{e^{imx}} = \cos mx - i \sin mx = e^{-imx}$ ,

$$(e^{imx}, e^{inx}) = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{imx}} e^{inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = 2\pi \delta_{mn}$$

より  $\{e^{inx} | n \in \mathbb{Z}\}$  は直交系,  $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} | n \in \mathbb{Z}\}$  は正規直交系であり,  $(e^{inx}, f) = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{inx}} f(x) dx$  なので,

$$d_n(f) := \frac{(e^{inx}, f(x))}{\|e^{inx}\|^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad f_m(x) = \sum_{n=-m}^m d_n(f) e^{inx}, \quad f_{\infty}(x) := \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n(f) e^{inx}$$

**例 2 (Legendre (ルジャンドル) の多項式)** 多項式を  $[-1, 1]$  上の関数と考え,  $1 = x^0, x^1, x^2$  を (正規) 直交化する: まず内積は

$$(x^k, x^n) = \int_{-1}^1 x^{k+n} dx = \frac{1}{k+n+1} [x^{k+n+1}]_{-1}^1 = \frac{1 - (-1)^{k+n+1}}{k+n+1} = \begin{cases} \frac{2}{k+n+1} & k+n+1 = \text{奇数} \\ 0 & k+n+1 = \text{偶数} \end{cases}$$

より,  $(x^0, x^0) = 2, (x^0, x^1) = 0, (x^1, x^1) = 2/3, (x^2, x^0) = 2/3, (x^2, x^1) = 0, (x^2, x^2) = 2/5. (\therefore 1 \perp x, x \perp x^2.)$

よって,  $p_0(x) \equiv 1, p_1(x) := x, p_2(x) = x^2 - 0x - (x^2, x^0)/(x^0, x^0) \cdot x^0 = x^2 - 1/3$  は直交系で, 正規化すると

$$u_0(x) = \sqrt{1/2}, \quad u_1(x) = \sqrt{3/2}x, \quad u_2(x) = \sqrt{5/2}(x^2 - 1/3)$$

が正規直交系になる. 実はこれらは一般には, ( $P_n$  の方は定数倍を除き)

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad \|P_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}, \quad u_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

で与えられ,  $P_n(x)$  は **Legendre (ルジャンドル) 多項式** といわれる  $n$  次多項式である.

**参考 (Hermite(エルミート) 多項式)** 無限区間  $\mathbb{R}$  上の広義積分  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$  は一般には収束しないので, 収束因子 (例えば)  $e^{-x^2}$  を掛けた積分  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-x^2} dx$  が収束する様な関数のみを考える. その全体を  $V$  とすればベクトル空間になり,  $(f, g) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx$  が内積になることが示せる. このとき

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \text{ は } (H_m, H_n) = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = 0 \quad (m \neq n), \quad \|H_n\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

をみたし, 直交関数系となる. この  $H_n(x)$  は **Hermite(エルミート) 多項式** といわれる  $n$  次多項式である.