

内積空間 (計量線形空間, 計量ベクトル空間)

[$\mathbb{R}^n$ の標準内積]: $a, b \in \mathbb{R}^n$ の標準内積 $(a, b) = (a, b)_{\mathbb{R}^n}$ と長さ (大きさ, ノルム (norm)) $\|a\|$ は

$$(a, b) := a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i = [a_1 \cdots a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = {}^t a b \in \mathbb{R}, \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\|a\| := \sqrt{(a, a)} = (a_1^2 + \cdots + a_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

で定められ, **Euclid (ユークリッド) 内積**, **Euclid ノルム**ともいう. $\mathbb{R}^n$ に標準内積を合わせて考えると **Euclid 空間** という. ($a \cdot b$ と表される事もあるが, 行列の積と混同しない様に (a, b) と表している.)

[$\mathbb{C}^n$ の標準内積]: $z = x + yi \in \mathbb{C}$ ($x, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}$) の複素共役 (共役複素数) は $\bar{z} = x - yi$. $z\bar{z} = \bar{z}z = x^2 + y^2 = |z|^2$ より, 絶対値は $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ に注意. $a, b \in \mathbb{C}^n$ の標準内積 $(a, b) = (a, b)_{\mathbb{C}^n}$ と長さ (大きさ, norm (ノルム)) $\|a\|$ は

$$(a, b) := \bar{a}_1 b_1 + \cdots + \bar{a}_n b_n = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i b_i = [\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a^* b = \overline{b^* a} \in \mathbb{C}, \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$(a, a) = \bar{a}_1 a_1 + \cdots + \bar{a}_n a_n = |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2, \quad \|a\| := \sqrt{(a, a)} = (|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

で定められ, **標準 Hermite (エルミート) 内積**, または **標準複素内積** ともいう. (a^* は a の随伴行列 ${}^t \bar{a}$.)

$z, w \in \mathbb{C}$ に対し $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, $\bar{z}w = \overline{z\bar{w}} = \overline{wz}$ と, 行列の積で与えられている事に注意すれば, 内積は次の性質 [I] をもつ.

[内積の公理 [I]]

[I1] (エルミート性) $(a, b) = \overline{(b, a)}$.

[I2] (線形性) (i) $(a, b+c) = (a, b) + (a, c)$. (ii) $(a, bs) = (a, b)s$, ($s \in \mathbb{C}$).

[I2'] (共役線形性) (i) $(a+b, c) = (a, c) + (b, c)$. (ii) $(as, b) = \bar{s}(a, b)$, ($s \in \mathbb{C}$).

[I3] (正値性) (a, a) は実数で $(a, a) \geq 0$, $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

注 [I2'] は [I2] と [I1] から次の様に導ける:

(i) $(a+b, c) \stackrel{I1}{=} \overline{(c, a+b)} \stackrel{I2i}{=} \overline{(c, a) + (c, b)} \stackrel{I1}{=} \overline{(a, c) + (b, c)} = (a, c) + (b, c)$. (ii) $(as, b) \stackrel{I1}{=} \overline{(b, as)} \stackrel{I2ii}{=} \overline{(b, a)s} = \bar{s} \overline{(b, a)} = \bar{s}(a, b)$.

a, b が実ベクトルの場合, [I2, 2'](i) はそのまま成立し, z が実数 $\Leftrightarrow \bar{z} = z$ なので, [I1], [I2'] は次で置き換えられる:

[I1] $_{\mathbb{R}}$ (対称性) $(a, b) = (b, a)$. [I2'] $_{\mathbb{R}}$ (双線形性) $(sa, b) = s(a, b) = (a, sb)$ ($s \in \mathbb{R}$).

[一般のベクトルの内積, ノルム] $K (= \mathbb{C}, \mathbb{R})$ 上のベクトル空間 V の各ベクトル a, b に, (内積 (inner product) と いわれる) 数 $(a, b) \in K$ が定められていて, 上記の内積の公理 [I] (= [I1], [I2, 2'], [I3]) をみたすとき, V を**内積空間**, **計量線形空間** または **計量ベクトル空間** という.

$a \in V$ の**ノルム** (長さ, 大きさ) $\|a\|$ も標準内積と同様, 次の様に定められる:

$$\|a\| := \sqrt{(a, a)} (\geq 0) \quad (\|a\|^2 = (a, a))$$

$K = \mathbb{C}$ のとき, 複素ベクトル空間 V の内積は, 特に **エルミート内積**, または **複素内積** といわれ, V は **複素内積空間**, **複素計量線型空間**, **複素計量ベクトル空間** や **ユニタリー空間** といわれる. $K = \mathbb{R}$ のとき, 実ベクトル空間 V の内積は, 特に**実内積**といわれ, V は **実内積空間**, **実計量線型空間**, **実計量ベクトル空間** や **ユークリッド空間** といわれる. このとき, [I1] $_{\mathbb{R}}$, [I2], [I2'] $_{\mathbb{R}}$, [I3] をみたしていることになる.

注 $\mathbb{C}^n$ の内積を $(a, b) = a_1 \bar{b}_1 + \cdots + a_n \bar{b}_n = {}^t a \bar{b}$ とし, [I2, 2']ii) を $(sa, b) = s(a, b)$, $(a, sb) = \bar{s}(a, b)$ とする教科書もあり, 本書と平行した議論が出来るが, 本書の定義の方が四元数体などに拡張するときに都合が良い.

例 1 [幾何ベクトルの内積] $a = \overrightarrow{OA}$ の長さ $\|a\|$ を線分 OA の長さとして定め, $b = \overrightarrow{OB}$ に対し, a, b のなす角を $\theta = \angle AOB$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とするとき, $(a, b) := \|a\| \|b\| \cos \theta$ は内積の公理 [I] をみたす.

例 2 ($\mathbb{C}^n$ の他の内積) $A = [a_1 \cdots a_n]$ を $\mathbb{C}^n$ の基底, $v, w \in \mathbb{C}^n$ の A に関する座標を x, y ($v = Ax, w = Ay$) とし,

$$G := A^* A = G^*, \quad (x, y)_G := (v, w)_{\mathbb{C}^n} = (Ax, Ay)_{\mathbb{C}^n} = (Ax)^* (Ay) = x^* A^* Ay = x^* G y$$

と定めると, $(x, y)_G$ は [I1], [I2] と, A, G が正則より [I3] をみたし, $\mathbb{C}^n$ の (標準ではない) もう一つの内積を与える. 共役線型性に注意すれば, 線型写像のときの [L5] と同様, 次式が成り立つ:

$$[I4] \quad \left(\sum_{i=1}^k a_i s_i, \sum_{j=1}^{\ell} b_j t_j \right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} (a_i s_i, b_j t_j) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} \bar{s}_i (a_i, b_j) t_j = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} \bar{s}_i t_j (a_i, b_j)$$

[I5] $\|sa + tb\|^2 = (sa + tb, sa + tb) = |s|^2 \|a\|^2 + \bar{s}t(a, b) + \overline{\bar{s}t(a, b)} + |t|^2 \|b\|^2 = |s|^2 \|a\|^2 + 2 \operatorname{Re} \bar{s}t(a, b) + |t|^2 \|b\|^2$
 ここで Re は実部を表す. ([I5] は 第2辺 = $\bar{s}s(a, a) + \bar{s}t(a, b) + s\bar{t}(b, a) + \bar{t}t(b, b)$ = 第3辺 より出る.) [I5] で $s = t = 1$ とおけば内積 (a, b) の実部が, $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re}(-iz)$ より $s = 1, t = -i$ とおくと虚部が得られる. 即ち, 長さから内積が得られる.

$$[I6] \quad \operatorname{Re}(a, b) = \frac{1}{2}(\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2), \quad \operatorname{Im}(a, b) = \frac{1}{2}(\|a-ib\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2)$$

例 3 内積空間 V のベクトルの組 $A=[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$ に対し、これらの内積を成分とする行列 $G=[g_{ij}]$, $g_{ij} := (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$ を A の **Gram(グラム) 行列** という. $(G^*)_{ij} = \overline{g_{ji}} = \overline{(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_i)} = (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = g_{ij}$ より G はエルミート行列 ($G^* = G$) で、例 2 の G は $(G)_{ij} = (A^*A)_{ij} = \mathbf{a}_i^* \mathbf{a}_j = (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$ より A の Gram 行列である.

A を V の基底とし、 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ の A に関する座標を $\mathbf{x} = {}^t[x_1 \cdots x_n]$, $\mathbf{y} = {}^t[y_1 \cdots y_n]$ ($\mathbf{v} = A\mathbf{x}$, $\mathbf{w} = A\mathbf{y}$) とするとき、

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i x_i, \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j y_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{x_i} (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) y_j = \mathbf{x}^* G \mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})_G.$$

即ち、例 2 と同じ式 $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{x}^* G \mathbf{y} =: (\mathbf{x}, \mathbf{y})_G$ を得る.

一般のベクトルの長さ $\|\cdot\|$ も幾何ベクトルの長さと同様の性質をもっている.

定理 5.1 (長さの公理 [N]) [N1] $\|\mathbf{a}\| \geq 0$, かつ $\|\mathbf{a}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$. [N2] $\|s\mathbf{a}\| = |s| \|\mathbf{a}\|$.

[N3] (Schwarz (シュヴァルツ) の不等式) $|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$. [N4] (三角不等式) $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$.

($\because$) [N1] は [I3] より, [N2] は [I5] で $t=0$ とすれば出る.

[N3]: $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ なら両辺共に 0 なので成立. $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ とし, [I5] で $s := \|\mathbf{b}\|^2 (> 0)$, $t := -\overline{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ ($\because (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\overline{t}$) とおけば,
 $0 \leq \|s\mathbf{a} + t\mathbf{b}\|^2 = |s|^2 \|\mathbf{a}\|^2 + 2 \operatorname{Re} \overline{s} t (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + |t|^2 \|\mathbf{b}\|^2 = s^2 \|\mathbf{a}\|^2 - 2 \operatorname{Re} s |t|^2 + |t|^2 s = s(\|\mathbf{a}\|^2 s - |t|^2) = s(\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - |(\mathbf{a}, \mathbf{b})|^2)$
より $s (> 0)$ で割って移項し、ルートをとれば出る.

[N4]: [I5] で $s=t=1$ とおけば, [N3] より $\operatorname{Re}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq |(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \stackrel{[N3]}{\leq} \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$. [N4] は次式より出る.

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \|\mathbf{b}\|^2 \leq \|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{b}\|^2 = (\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2$$

[なす角] 実内積空間 V では内積 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ が実数なので、 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ のとき Schwarz の不等式 [N3] から

$$-1 \leq \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \leq 1, \quad \therefore \cos \theta = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

となる角 θ が一意的に存在する. この θ を実ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の **なす角** という.

[直交系, 正規直交系] 内積空間 V のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ について、内積が 0 ($(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ ($= (\mathbf{b}, \mathbf{a})$)) のとき、
 $(\mathbf{a} = \mathbf{0}, \mathbf{b} = \mathbf{0}$ も含め) $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は **直交** する、または **垂直** であるといい、 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ と表す.

$\mathbf{b}$ が V の部分空間 W の全てのベクトル $\mathbf{a}$ と直交するとき、 W と $\mathbf{b}$ は **直交** するといい、 $W \perp \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \perp W$ と表す.

定理 5.2 部分空間 $W = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$ と $\mathbf{b} \in V$ に対し、 $(\mathbf{b}, \mathbf{a}_i) = 0$ ($= (\mathbf{a}_i, \mathbf{b})$) ($i = 1, \dots, k$) $\Leftrightarrow \mathbf{b} \perp W$.

($\because$) $(\Rightarrow)$ $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^k \mathbf{a}_i s_i \in W \Rightarrow (\mathbf{b}, \mathbf{w}) \stackrel{I4}{=} \sum_{i=1}^k (\mathbf{b}, \mathbf{a}_i) s_i = \sum_{i=1}^k 0 \cdot s_i = 0$ より $\mathbf{b} \perp W$. 逆は $\mathbf{a}_i \in W$ と $\mathbf{b} \perp W$ の定義による.

● 長さが 1 のベクトル $\mathbf{u}$ ($\|\mathbf{u}\| = 1$) を **単位ベクトル** という.

ベクトル $\mathbf{a}$ ($\neq \mathbf{0}$) を長さ $\|\mathbf{a}\|$ で割って、単位ベクトルにすること:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^{-1} \mathbf{a} \quad \left(\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \text{とも表す} \right)$$

を「 $\mathbf{a}$ を **正規化** (または **規格化**) する」といい、 $\mathbf{u}$ を $\mathbf{a}$ の正規化 (規格化), または $\mathbf{a}$ 方向の単位ベクトルという.

● V のベクトルの組 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ がすべて $\mathbf{0}$ でなく、互いに直交するとき、即ち:

$$(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = 0 \quad (i \neq j), \quad \|\mathbf{a}_i\| \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (\because (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i) \delta_{ij} = \|\mathbf{a}_i\|^2 \delta_{ij})$$

のとき $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ は **直交系** であるといい、さらに $\mathbf{a}_i$ がすべて単位ベクトルのとき、即ち

$$(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

のとき **正規 (規格) 直交系** であるという. (正規) 直交系が V の基底になるとき **(正規) 直交基底** であるという.

● 正規直交基底 $A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$ の Gram 行列は単位行列 E_n になり、 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ の内積は A に関する座標 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ の標準内積になる: $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = {}^t \mathbf{x} E_n \mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathbb{C}^n}$.

注 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ が直交系ならば、 $\mathbf{a}_i$ の正規化を $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\|\mathbf{a}_i\|} \mathbf{a}_i$ ($i = 1, \dots, n$) とすれば $\{\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n\}$ は正規直交系になる. なお、(正規) 直交系であることはベクトルの並び順を変えても変わらない.

例 4 K^n の標準内積に関し、基本ベクトルの組 $E_n = [\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n]$ は正規直交基底である. ($(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = {}^t \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$.)

座標平面 (空間) の基本ベクトルの組を回転した幾何ベクトルの組も正規直交系である.

[直交射影 (正射影)] $\mathbf{0}$ でない幾何ベクトル $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ について、 $\mathbf{u} = \|\mathbf{a}\|^{-1} \mathbf{a}$,

$\theta = \angle AOB$ とし、 B から直線 OA に下ろした垂線の足を B' , $\mathbf{b}' = \overrightarrow{OB'}$ とすると、

$$\mathbf{b}' = \overrightarrow{OB'} = (\overrightarrow{OB} \cos \theta) \mathbf{u} = \mathbf{u} (\mathbf{u}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|^2}, \quad \mathbf{b} - \mathbf{b}' = \overrightarrow{B'B} \perp \mathbf{a}.$$

即ち、 $\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ に平行な $\mathbf{b}'$ と、 $\mathbf{a}$ に直交する $\mathbf{b} - \mathbf{b}'$ に一意的に分解される. この $\mathbf{b}'$ を $\mathbf{b}$

の直線 $OA = \langle \mathbf{a} \rangle$ への**直交射影**, または**正射影**という. また、幾何ベクトルの直交系 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ の張る平面 $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ へ

の $\mathbf{b}$ の直交射影 $\mathbf{b}'$ ($= \overrightarrow{OB'}$, B' は平面 $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ に下ろした垂線の足) は、 $\mathbf{b}' = \mathbf{a}_1 \frac{(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}_1\|^2} + \mathbf{a}_2 \frac{(\mathbf{a}_2, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}_2\|^2}$ で与えられ、

$\mathbf{b} - \mathbf{b}' \perp \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ であることが分かるが、このことがより一般的に成り立つことを示す.

