

例 7(合成写像, 逆写像と表現行列) V の恒等変換 1_V の表現行列は基底 A の取り方によらず単位行列 E_n である.

$f: V \rightarrow W, g: W \rightarrow U$ を線形写像, $A, B, C = [c_1 \cdots c_\ell]$ をそれぞれ V, W, U の基底

f の A, B に関する表現行列を $F = [f_{ij}]$ ($f(A) = BF, F$ は $m \times n$ 行列)

g の B, C に関する表現行列を $G = [g_{ij}]$ ($g(B) = CG, G$ は $\ell \times m$ 行列) とするとき,

合成写像 $g \circ f: V \rightarrow U$ の A, C に関する表現行列は, 表現行列の積 GF :

$$(g \circ f)(A) = C(GF), \quad (GF \text{ は } \ell \times n \text{ 行列})$$

$U = V, C = A$ で $g: W \rightarrow V$ が f の逆写像のとき, g の表現行列 G は F の逆行列 F^{-1} である..

($\therefore$) $(g \circ f)(A) = g(f(A)) = g(BF) = g(B)F = (CG)F = C(GF)$ より求める表現行列は GF .

$g = f^{-1}$ のとき, $GF = E, FG = E$ より $G = F^{-1}$.

定理 4.11(表現行列と座標) 線型写像 $f: V \rightarrow W$ の, 基底 A, B に関する表現行列を H ($f(A) = BH$), $v \in V$ の A に関する座標を $x \in K^n$ ($v = Ax$), $f(v) \in W$ の B に関する座標を $y \in K^m$ ($f(v) = By$) とするとき,

$$(1) \quad y = Hx$$

($\therefore$) $By = f(v) = f(Ax) = f(A)x = (BH)x = B(Hx)$.

定理 4.12(基底変換と表現行列)

$A, A' = [a'_1 \cdots a'_n]$ を V の基底, 変換行列を P ($A' = AP, P$ は n 次正則行列),

$B, B' = [b'_1 \cdots b'_m]$ を W の基底, 変換行列を Q ($B' = BQ, Q$ は m 次正則行列),

線型写像 $f: V \rightarrow W$ の基底 A, B に関する表現行列を H ($f(A) = BH$),

基底 A', B' に関する表現行列を H' ($f(A') = B'H'$) (H, H' は $m \times n$ 行列) とするとき

$$(2) \quad H' = Q^{-1}HP$$

($\therefore$) $f(A') = B'H' = (BQ)H' = B(QH'), f(A') = f(AP) = f(A)P = (BH)P = B(HP)$ より $QH' = HP. \therefore H' = Q^{-1}HP$.

例 8 線型写像 $f_H: K^n \rightarrow K^m$ ($f_H(x) = Hx$) の, 基底 $A = [a_1 \cdots a_n], B = [b_1 \cdots b_m]$ に関する表現行列 H' は, $f_H(A) = f_H(E_n A) \stackrel{[L5]}{=} f_H(E_n)A = HA = (BB^{-1})HA = B(B^{-1}HA) = BH'$ より $H' = B^{-1}HA$.

定理 4.13(表現行列の標準形) 線型写像 $f: V \rightarrow W$ は V, W の基底 $A = [a_1 \cdots a_n], B = [b_1 \cdots b_m]$ をうまく選ぶことによりその表現行列を標準形 $F_r(m, n)$ に出来る. 即ち, (正射影の様に)

$$f(A) = BF_r(m, n) = B \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \quad (r = \text{rank } H) \iff f(a_i) = \begin{cases} b_i & 1 \leq i \leq r \\ 0 & r < i \leq n \end{cases}$$

($\therefore$) f の基底 A', B' に関する表現行列 H は, ある正則行列 P, Q によって $Q^{-1}HP = F_r(m, n)$ と標準形に変形できた (定理 2.11). このとき, $A = A'P, B = B'Q$ と基底を変換すると, (2) より $H' = Q^{-1}HP = F_r(m, n)$.

系 4.14(一次変換の基底変換) 一次変換 $f: V \rightarrow V$ のときは, (2) で $A = B, A' = B', Q = P$ として,

$$(3) \quad H' = P^{-1}HP$$

このとき H と H' は **相似** であるという. 従って, 互いに相似な行列は, 同一の一次変換のいろいろな基底に対する表現行列と考えられ, 相似により不変な行列の性質は一次変換の性質と考えることが出来る. 例えば, どの基底に対する f の表現行列の行列式, トレースも式 (5) により同じ値をもつので, これらを一次変換の行列式, トレースと定義できる. また, $P^{-1}HP$ が簡単 (例えば対角行列等) になるとき標準形と呼ぶが, これは次章で考える.

線形写像の核と像

一般に, 集合間の写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し, $x \in X$ の像全体である Y の部分集合を X の f による **像** (image) といい, $f(X)$ または $\text{Im } f$ と表す. 即ち,

$$f(X) = \text{Im } f := \{f(x) \in Y \mid x \in X\} = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ となる } x \in X \text{ がある}\} \subset Y$$

f がベクトル空間 V, W の間の線型写像 $f: V \rightarrow W$ のとき, W の零ベクトル 0 に移る V のベクトル全体の集合

$$\text{Ker } f := \{a \in V \mid f(a) = 0\}$$

を f の **核** (kernel) という.

例 9 $f = f_H: K^n \rightarrow K^m, f(x) = Hx, H = [h_1 \cdots h_n]$ ($m \times n$ 行列) のとき,

$\text{Im } f = \langle h_1, \cdots, h_n \rangle$. ($\therefore$) $y = f(x) \in \text{Im } f, x = {}^t[x_1 \cdots x_n] \iff y = f(x) = Hx = \sum_{i=1}^n h_i x_i \iff y \in \langle h_1, \cdots, h_n \rangle$.

$\text{Ker } f = \{x \in K^n \mid Hx = 0\} = \text{「} Hx = 0 \text{ の解空間」}$.

[線形写像の核と像] 線型写像 $f: V \rightarrow W$ に対し, ($0_V, 0_W$ を V, W の零ベクトルとするとき)

(1) f の像 $\text{Im } f = f(V)$ は W の部分空間, (2) f の核 $\text{Ker } f$ は V の部分空間.

($\therefore$) (1) [S0]: $0_W \stackrel{[L0]}{=} f(0_V) \in \text{Im } f$. [S1]: $f(a) + f(a') \stackrel{[L1]}{=} f(a + a') \in \text{Im } f$. [S2]: $sf(a) \stackrel{[L2]}{=} f(sa) \in \text{Im } f$ による.

(2) [S0]: $f(0_V) \stackrel{[L0]}{=} 0_W$ より $0_V \in \text{Ker } f$. $a, a' \in \text{Ker } f$ ($\therefore a, a' \in V, f(a) = f(a') = 0_W = 0$), $s \in K$ に対し,

[S1] $f(a + a') \stackrel{[L1]}{=} f(a) + f(a') = 0 + 0 = 0$ より $a, a' \in \text{Ker } f$. [S2]: $f(sa) \stackrel{[L2]}{=} sf(a) = s0 = 0$ より $sa \in \text{Ker } f$ による.

定理 4.15(線形写像の次元定理) 線形写像 $f: V \rightarrow W$ に対し, $\dim V = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$.

($\therefore$) V, W ($\dim V=n, \dim W=m$) の基底 A, B を f の表現行列 H が標準形 $F_r(m, n)$ ($r=\text{rank } H$) になる様にとれば $\text{Im } f$ の基底は $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$, $\dim \text{Im } f=r$ で, $\text{Ker } f$ の基底は $\mathbf{a}_{r+1}, \dots, \mathbf{a}_n$, $\dim \text{Ker } f=n-r$. 合わせて $n=\dim V$.

例 10 $m \times n$ 行列 $H=[\mathbf{h}_1 \cdots \mathbf{h}_n]$ により定まる線型写像 $f=f_H: K^n \rightarrow K^m$, $f(\mathbf{x})=H\mathbf{x}$ の場合:

$\text{Ker } f=\{\mathbf{x} \in K^n | H\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$ = 「 $H\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解空間」, 基底は基本解, その個数 $=\dim \text{Ker } f=n-\text{rank } H$.

$\text{Im } f=\langle \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n \rangle$. 基底は H の軸列, その個数 $=\dim \text{Im } f=\text{rank } H$. この和 $=n=\dim K^n$. (次元定理 4.15)

[線形写像の階数] 線形写像 $f: V \rightarrow W$ の **階数** $\text{rank } f$ を $\text{rank } f=\dim \text{Im } f$ で定める. このとき, f の任意の基底に関する表現行列 H に対し, $\text{rank } f=\text{rank } H$. ($\text{rank } H=\text{rank } Q^{-1}HP=\text{rank } F_r(m, n)=\dim \text{Im } f=\text{rank } f$.)

階数のまとめ $m \times n$ 行列 H の階数を与える同値条件として次を得ている:

- (1) 標準型に現れる 1 の個数. (2) H の階段行列の 0 でない行数. (3) H の軸列の個数.
- (4) H の一次独立な列ベクトルの最大個数. (5) H の一次独立な行ベクトルの最大個数.
- (6) $f(\mathbf{x})=H\mathbf{x}$ の階数 = 像 $\text{Im } f$ の次元. (7) H の 0 でない小行列式の最大次数.

補足 一般に, 写像 $f: X \rightarrow Y$ について,

$Y=f(X)$, 即ち, 各 $y \in Y$ には $y=f(x)$ となる $x \in X$ があるとき写像 f は **全射**, または Y の上への写像という.

$x, x' \in X$ に対し, $f(x)=f(x') \Rightarrow x=x'$ (対偶: $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$) が成り立つとき f は **単射 (1 対 1 写像)** という. f が全射かつ単射のとき, f は **全単射**, または X と Y の間の **1 対 1 対応** という. f が全単射のとき, 各 $y \in Y$ には $y=f(x)$ となる $x \in X$ が唯 1 つあるので, $g(y)$ をこの x と定める事により写像 $g: Y \rightarrow X$ が定まり, $g(f(x))=x$, $f(g(y))=y$. 即ち, 集合間の全単射 f は集合の同型で, この g は f の**逆写像**.

● 線形写像 $f: V \rightarrow W$ に対し, (1) f が全単射なら, 逆写像 g も線型写像. (2) f が単射 $\Leftrightarrow \text{Ker } f=\{\mathbf{0}\}$.

($\therefore$) (1) g が f の逆写像より, 一般に (*): $g(f(\mathbf{v}))=\mathbf{v}$ が成立. $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$, $g(\mathbf{w})=\mathbf{v}, g(\mathbf{w}')=\mathbf{v}' \in V$, $s \in K$ とする.

[L1]: $g(\mathbf{w}+\mathbf{w}')=g(f(\mathbf{v})+f(\mathbf{v}')) \stackrel{f:L1}{=} g(f(\mathbf{v}+\mathbf{v}')) \stackrel{(*)}{=} \mathbf{v}+\mathbf{v}'=g(\mathbf{w})+g(\mathbf{w}')$. [L2]: $g(s\mathbf{w})=g(sf(\mathbf{v})) \stackrel{f:L2}{=} g(f(s\mathbf{v}))=s\mathbf{v}=sg(\mathbf{w})$.

(2) ($\Rightarrow$) $\mathbf{v} \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(\mathbf{v})=\mathbf{0}=f(\mathbf{0})$. f : 単射 $\Rightarrow \mathbf{v}=\mathbf{0}$. $\therefore \text{Ker } f=\{\mathbf{0}\}$.

($\Leftarrow$) $f(\mathbf{v})=f(\mathbf{v}') \Leftrightarrow f(\mathbf{v}-\mathbf{v}')=f(\mathbf{v})-f(\mathbf{v}')=\mathbf{0}$. $\therefore \mathbf{v}-\mathbf{v}' \in \text{Ker } f=\{\mathbf{0}\}$ より $\mathbf{v}-\mathbf{v}'=\mathbf{0}$. $\mathbf{v}=\mathbf{v}'$. よって f は単射.

同型である線形写像 $f: V \rightarrow W$ を**線型同型写像**という. 上の (1) より逆写像も線型同型写像. このとき, V と W は**線型同型**, またはベクトル空間として**同型**という. (V と W は f により同じものと見なせるということ.)

● V のベクトルの組 $A=[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$ に対し, 線型写像 $\varphi_A: K^n \rightarrow V$ を $\varphi_A(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$ で定めたが,

(1) A が生成系 $\Leftrightarrow \mathbf{v} \in V$ には $A\mathbf{x}=\mathbf{v}$ となる $\mathbf{x} \in K^n$ がある $\Leftrightarrow \varphi_A$ は全射.

(2) A が一次独立 $\Leftrightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{0}_V$ となる $\mathbf{x} \in K^n$ は $\mathbf{0}_n$ のみ $\Leftrightarrow \text{Ker } \varphi_A=\{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \varphi_A$ は単射. (上の (2) による)

(3) A が基底 $\Leftrightarrow \varphi_A$ は全単射 $= K^n$ と V は線型同型. 逆写像 ψ_A が $\mathbf{v} \in V$ の座標 $\mathbf{x}=\psi_A(\mathbf{v})$ を与える線型同型.

(4) n 次元ベクトル空間は全て K^n と線型同型なので, 次元が等しいベクトル空間同士は (K^n を通じて) 線型同型.

以上より, 抽象的なベクトル空間や線型写像でも, 基底を定め, 座標や表現行列を考える事により, (理論的には) 数ベクトルや行列に帰着することが出来る. (実際の計算においては直接求める方が早いかもしれないが.)

参考: 座標を与える線型同型 ($\mathbf{x}=\psi_A(\mathbf{v})$ 等), 線型写像 ($f: V \rightarrow W$ 等), 表現行列 (H 等) の関係を図式で表すと:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{v} \in V & \xrightarrow{f} & W \ni \mathbf{w} & \xrightarrow{g} & U \ni \mathbf{u} \\
 \psi_A \downarrow \cong & & \cong \downarrow \psi_B & & \cong \downarrow \psi_C \\
 \mathbf{x} \in K^n & \xrightarrow{H} & K^m \ni \mathbf{y} & \xrightarrow{G} & K^\ell \ni \mathbf{z}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 \mathbf{v} \in V & \xrightarrow{f} & W \ni \mathbf{w} & & \\
 \psi_{A'} \swarrow \cong & \psi_A \downarrow \cong & \cong \downarrow \psi_B & \searrow \psi_{B'} & \\
 \mathbf{x}' \in K^n & \xrightarrow{P} & \mathbf{x} \in K^n & \xrightarrow{H} & K^m \ni \mathbf{y} \xrightarrow{Q^{-1}} K^m \ni \mathbf{y}'
 \end{array}$$

(ここで, $f(\mathbf{v})=\mathbf{w}$, $\psi_A(\mathbf{v})=\mathbf{x}$, $\psi_B(\mathbf{w})=\mathbf{y}$, $H \cdot \mathbf{x}=H\mathbf{x}=f_H(\mathbf{x})$, $\cong$ は線型同型, 等を表し,

図式は, (最左では) $\mathbf{y}=\psi_B(\mathbf{w})=\psi_B(f(\mathbf{v}))=H(\psi_A(\mathbf{v}))=H\mathbf{x}$, 等を表しており, これらの図式は可換という.)