補足: 部分空間の共通部分と基底

例 $\mathbb{R}^4$ のベクトルの組 $A=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4]$, $B=[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3]$ を次の様に定め, $W_1=\langle A\rangle$, $W_2=\langle B\rangle$ として共通部分 $W_1\cap W_2$ を求める. ここで, B は W_2 の基底 (=一次独立) である:

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-4\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0\\-3\\5\\-4\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}3\\3\\-7\\-4\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}0\\-1\\2\\4\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}-1\\-4\\8\\8\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}2\\2\\-4\\9\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_3=\begin{bmatrix}6\\3\\-8\\6\end{bmatrix}$$

行列 $[A,B]$ を階段行列に変形すると:

$$[A,B]=\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&0&3&0&-1&2&6\\-1&-3&3&-1&-4&2&3\\1&5&-7&2&8&-4&-8\\-4&-4&-4&4&8&9&6\end{array}\right]\mapsto\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&0&3&0&-1&0&2\\0&1&-2&0&1&0&0\\0&0&0&1&2&0&-1\\0&0&0&0&0&1&2\end{array}\right]\ \therefore\ \begin{array}{l}\boldsymbol{a}_3=3\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2\\\boldsymbol{b}_1=-\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_4\\\boldsymbol{b}_3=2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_4+2\boldsymbol{b}_2\end{array}\ \therefore\ \begin{array}{l}\langle A\rangle=\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4\rangle\\\boldsymbol{b}_1=-\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_4=:\boldsymbol{c}_1\\\boldsymbol{b}_3-2\boldsymbol{b}_2=2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_4=:\boldsymbol{c}_2\end{array}$$

$\therefore \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ は一次独立で W_1 の基底. $\boldsymbol{b}_1=-\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_4$ (=: $\boldsymbol{c}_1$ とおく), $\boldsymbol{b}_3-2\boldsymbol{b}_2=2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_4$ (=: $\boldsymbol{c}_2$ とおく)
これらの左辺 $\in W_2$, 右辺 $\in W_1$ より, 両辺 $=\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\in W_1\cap W_2$. 即ち,

$$\boldsymbol{c}_1=\begin{bmatrix}-1\\-4\\8\\8\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-3\\5\\-4\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\-1\\2\\4\end{bmatrix},\ \boldsymbol{c}_2=\begin{bmatrix}6\\3\\-8\\6\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}2\\2\\-4\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\-12\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\-1\\2\\4\end{bmatrix}\in W_1\cap W_2$$

$\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2$ が $W_1\cap W_2$ の基底になることが次の様に示される.

• W_1,W_2 を $A=[\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_k]$, $B=[\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{b}_\ell]$ で生成される部分空間とし, B は W_2 の**基底** (=**一次独立**) とする.
$[A,B]$ を階段行列に変形すると, B の部分の軸列でない列から得られる関係式 $\boldsymbol{b}_i=\cdots$ には A の軸列でない列は現れないので, 以下記述を簡単にする為, A も一次独立とすると, $[A,B]$ の軸列でない B の各列 $\boldsymbol{b}_j$ が次の関係式を与える: $[A,B]$ の階段行列の第 $k+j$ 列が $\boldsymbol{s}_{k+j}={}^t[s_1\cdots s_k\,t_1\cdots t_{j-1}\,0\cdots 0]$ とすると,

$$(*)\ \ \boldsymbol{b}_j=\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{a}_is_i+\sum_{i=1}^{j-1}\boldsymbol{b}_it_i\ \ (s_i,t_i\in K),\quad\therefore\ \sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{a}_is_i=\boldsymbol{b}_j-\sum_{i=1}^{j-1}\boldsymbol{b}_it_i=:\boldsymbol{c}_j$$

ここで $\boldsymbol{c}_j$ は右の式の, 左辺 $\in W_1$, 中辺 $\in W_2$ より共通部分 $W_1\cap W_2$ に属し, $r=\mathrm{rank}[A,B]$ ($\geqq k,\ell$) とおくと, r は $[A,B]$ の軸列の個数 ($=\dim W_1+W_2$) なので $s=k+\ell-r$ が $[A,B]$ の軸列でない列の個数.
以下, $s\geqq 1$ とし, $\boldsymbol{b}_{j_1},\dots,\boldsymbol{b}_{j_s}$ を $[A,B]$ の軸列でない列とする. また, $\boldsymbol{b}_{j_p}$ に対応する $\boldsymbol{c}_{j_p}$ を $\boldsymbol{c}_p$ と表す.
($s=0$ のときは $W_1\cap W_2=\{\boldsymbol{0}\}$ で, W_1+W_2 は直和 $W_1\oplus W_2$ になる.)

補題 4.16 上のとき (B が一次独立なら) $C=[\boldsymbol{c}_1,\dots,\boldsymbol{c}_s]$ は共通部分 $W_1\cap W_2$ の基底になる.
($\because$) 和空間の次元定理 4.8 により $\dim(W_1\cap W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1+W_2)=k+\ell-\mathrm{rank}[A,B]=s$ なので, $\boldsymbol{c}_1,\dots,\boldsymbol{c}_s$ (s 個) が一次独立なら基底になる. B は W_2 の基底 (=一次独立) であり, これらは

$$\boldsymbol{c}_p=\boldsymbol{b}_{j_p}+\sum_{j=1}^{j_p-1}\boldsymbol{b}_jt_j\ \in W_2\ \ (t{=}1,\dots,s)\quad(\text{第 2 項の和は } j_p{-}1 \text{ 迄の和})$$

と表せていて, $\boldsymbol{c}_p$ は $\boldsymbol{b}_{j_p}$ を含み, $\boldsymbol{c}_1,\dots,\boldsymbol{c}_{p-1}$ は $\boldsymbol{b}_{j_p}$ を含まないので, $\boldsymbol{c}_p$ は $\boldsymbol{c}_1,\dots,\boldsymbol{c}_{p-1}$ の一次結合で表せない. (特に $\boldsymbol{c}_1=\boldsymbol{b}_{j_1}\neq\boldsymbol{0}$.) よって帰納的に $C=[\boldsymbol{c}_1,\dots,\boldsymbol{c}_s]$ は一次独立になる. 従って C は $W_1\cap W_2$ の基底になる.
(注) 左の A の方は生成系でも良い. 階段行列を作れば A の基底にならないベクトルを判別出来るからである. これは右の B が基底でないときには適用出来ない. (C から一次独立な最大の組を選び出す必要がある.)

部分空間の生成系から方程式を求める方法: W に生成系 B が与えられているとき, $W=W_A=\{\boldsymbol{x}\in K^n\,|\,A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ となる方程式の係数行列 A は, 次の様に ${}^tB\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の基本解 $X=[\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_m]$ の転置行列 ${}^tX=A$ になる.
• $B=[\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{b}_k]$ が満たすべき方程式の係数を $\boldsymbol{a}=[a_1\cdots a_n]$ とする. 即ち, 各 $\boldsymbol{b}_j={}^t[b_{1j}\ \cdots\ b_{nj}]$ が方程式 $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$ の解になるとして $\boldsymbol{a}$ を求める事を考える. このとき, $\boldsymbol{b}_j$ は $0=a_1b_{1j}+\cdots+a_nb_{nj}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_j$ を満たす. 従って,

$${}^t\boldsymbol{0}=[0\cdots0]=[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_k]=\boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{b}_k]=\boldsymbol{a}B$$

即ち, $\boldsymbol{a}$ は方程式 ${}^t\boldsymbol{x}B={}^t\boldsymbol{0}$ の解. これを解けばよいが, 転置を取れば $({}^tB)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ なので, (慣れている) こちらを解いてから もう一度転置を取れば $\boldsymbol{a}$ が求まる. このとき $({}^tB)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の 基本解の作る行列 $X=[\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_m]$ の転置行列 A が求める方程式の係数行列になる, 即ち次が成り立つ.

補題 4.17 $B=[\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{b}_k]$ ($n\times k$ 行列) とし, B の生成する K^n の部分空間を $W{=}\langle\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_k\rangle$, とするとき, $({}^tB)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の基本解を $X=[\boldsymbol{x}_1,\ \dots,\ \boldsymbol{x}_m]$, $A={}^tX$ とすれば $W=W_A{=}\{\boldsymbol{x}\in K^n\,|\,A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ が成り立つ.
($\because$) $({}^tB)({}^tA){=}({}^tB)X=[({}^tB)\boldsymbol{x}_1\cdots({}^tB)\boldsymbol{x}_m]=[\boldsymbol{0}\cdots\boldsymbol{0}]{=}O_{km}$ より両辺の転置を取れば
$AB{=}[A\boldsymbol{b}_1\cdots A\boldsymbol{b}_k]=O_{mk}$ $\therefore$ $A\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{0}$, …, $A\boldsymbol{b}_k=\boldsymbol{0}$. 従って, $\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_k$ は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解, 即ち, $W=\langle\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_k\rangle\subset W_A$. X は基本解なので一次独立, よって $\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\,{}^tA=\mathrm{rank}\,[\boldsymbol{x}_1,\ \dots,\ \boldsymbol{x}_m]=m$ であり, 方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間 W_A の次元は $n-\mathrm{rank}\,A=n-m=n-(n-\mathrm{rank}\,B)=\mathrm{rank}\,B$, 即ち, $\dim\langle B\rangle=\mathrm{rank}\,B=\dim W_A$. よって定理 4.7(2)* より $W=\langle B\rangle=W_A$ となる.