ベクトル空間と部分空間の例

ベクトル空間の例として, (1) 数ベクトル空間 K^n, (2) 幾何ベクトル空間, (3) $m\times n$ K-行列全体 $M_{m,n}(K)$, 特に n 次正方 K-行列全体 $M_n(K)$, (4) 零ベクトル空間 $\{\mathbf{0}\}$ (全てのベクトル空間の部分空間でもある), (5) K 係数一変数多項式全体 $K[x]$ 等を, 部分空間の例として, (1) $m\times n$ K-行列 A に対する $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解空間 W_A, (2) 原点を含む直線や平面, (5) n 次以下の K 係数一変数多項式全体 $K[x]_n$ 等を, また, ベクトルの組 A の生成する部分空間 $\langle A\rangle$ や共通部分, 和空間等を挙げた.

その他にも次の様な様々な例がある. なお, $\boldsymbol{a}$ の逆ベクトル $-\boldsymbol{a}$ は $(-1)\boldsymbol{a}$ で, 零ベクトル $\mathbf{0}$ は $0\boldsymbol{a}$ で与えられる.

(1) **無限次元数空間 (数列空間)** K^∞: 数列 $\{x_n\}$ は数ベクトル $\boldsymbol{x}={}^t[x_1,x_2,\ldots]$ と見なされる. 無限項の数ベクトル $\boldsymbol{x}={}^t[x_1,x_2,\ldots]$ 全体の集合 K^∞ も項ごとの和, 定数倍により K 上のベクトル空間になる.

(2) **多変数多項式の空間** K 係数 n 変数多項式全体 $K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$: 多項式の和, 定数倍（各係数の和, 定数倍）でベクトル空間になる. 尚, 多項式 $f(x)$ と $g(x)$ が「多項式として等しい」は次数が同じで (展開形での) 全ての係数が等しいことを意味し, $f=g$, $f(x)\equiv g(x)$ (恒等的に等しい), $f(x)=g(x)$ 等と表す. 従って, 単項式 $1,x_1,\ldots,x_n,x_ix_j,x_ix_jx_k,\ldots$ は**一次独立**.

(注) $f(x)=g(x)$ を方程式と誤解しない様に, $f=g$, $f(x)\equiv g(x)$ を用いることも多い.

● 以下 X を集合 (例えば $\mathbb{R},\mathbb{R}^2,\ldots$ 等) とし, V を K 上のベクトル空間, $s\in K$ とする. X 上の関数や写像 $f,g:X\to K$, $f,g:X\to V$ の和 $f{+}g$, s 倍 sf は 値での和, s 倍と定められる:

$$\text{各 } a\in X \text{ について}\quad (f{+}g)(a):=f(a)+g(a),\quad (sf)(a):=s(f(a))\qquad \text{(通常の関数の和, 定数倍)}$$

(例えば $f(x)=\sin x$, $g(x)=x^2{+}3x{+}1$ のとき, $(f{+}g)(x):=f(x){+}g(x)=\sin x{+}x^2{+}3x{+}1$, $(sf)(x):=s\sin x$.)
f と g が関数や写像として**等しい** ($f=g$) とは, 「全ての $a\in X$ について $f(a)=g(a)$」のときと定められる. この時, $f(x)$ と $g(x)$ は**恒等的に等しい**ともいい, $f(x)\equiv g(x)$ とも表す (多項式と同じで, $f(x)=g(x)$ も用いる).
定数やベクトルも関数や写像とみなされる. 特に $0\in K$, $\mathbf{0}\in V$ は零ベクトル. また, $(-f)(x):=-f(x)$. このとき, 各 $a\in X$ に対し $f(a),g(a)$ は数やベクトルだから, $(f{+}g)(a):=f(a)+g(a)=g(a)+f(a)=(g{+}f)(a)$ が全ての a について成り立つので $(f{+}g)=g{+}f$. 同様にして次が分かる:

(3) **関数空間**: 集合 X 上の K-値関数全体 $F(X,K)=\{f:X\to K\}$ は K 上のベクトル空間になる.
($X=\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3$ 等のとき, 関数は $f(x,y),f(x,y,z)$ 等と表される.)

(4) **写像空間**: 集合 X から K 上のベクトル空間 V への写像全体 $F(X,V)$ は K 上のベクトル空間になる.
$V=\mathbb{R}^n$ のとき, $f:X\to\mathbb{R}^n$ は n 個の実数値関数の組 ${}^t[f_1(x)\,f_2(x)\,\cdots\,f_n(x)]$ である.

[部分空間の例] $X=\mathbb{R}^n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ とする. 以下の (1,3,4) の例は微分積分学における定理を用いて示される.

(1) 数列空間 K^∞ の部分空間として, (i) **収束数列全体**. (収束数列の和・定数倍は収束する, による.)
(ii) **同次線形漸化式** $(*)$ $x_{n+k}+a_{k-1}x_{n+k-1}+\cdots+a_0x_n=0$ $(a_i\in K)$ **の解空間**.
$(\because)$ $\{x_n\},\{y_n\}$ を $(*)$ の解 $\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{k}a_ix_{n+i}=0,\ \sum_{i=0}^{k}a_iy_{n+i}=0\ (a_k{:=}1, n{=}1,2,\ldots)\right)$ $s,t\in K$ とすると, $s\{x_n\}{+}t\{y_n\}=\{sx_n{+}ty_n\}$ は, $\sum_{i=0}^k a_i(sx_{n+i}{+}ty_n)=s(\sum_{i=0}^k a_ix_{n+i})+t(\sum_{i=0}^k a_iy_{n+i})=s{\cdot}0{+}t{\cdot}0=0$ より $(*)$ の解になるので [S3] をみたす.
この数列は最初の k 項 $b_1,\cdots,b_k$ により定められ, 解空間の次元は k になることが分かる.

(2) m **次以下の多項式の空間** $K[x_1,x_2,\ldots,x_n]_m$ は n 変数多項式全体 $K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ の部分空間になる.

(3) $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (実数値 1 変数関数全体) の部分空間として, (i) 連続関数全体の空間 $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $C^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ も同様.
(ii) r 回連続微分可能な関数全体 $C^r(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $C^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ も同様に $F(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ の部分空間になる.
((i) は連続関数の和・定数倍は連続, による. (ii) は (i) と, 可微分関数の和・定数倍は可微分で,
$(f{+}g)'(x)=f'(x){+}g'(x)$, $(sf)'(x)=s{\cdot}f'(x)$ (**微分の線型性**という) による. 偏微分も同様.)
(iii) 線型同次常微分方程式の解空間: y を x の関数とし, その n 階導関数を $y^{(n)}$ とするとき, 方程式

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}{+}\cdots{+}a_1y'{+}a_0y=0\quad (y'{=}y^{(1)}, y{=}y^{(0)})\quad \text{(各 } y^{(i)} \text{ について一次で定数項がない)}$$

の形の方程式を n 階同次線型常微分方程式という. この解集合も $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解空間や以下の線型同次漸化式の解空間と同様に部分空間になることが分かる. 微分方程式論 (微積分の教科書参照）により, この解は初期値 $y(0),\cdots,y^{(n-1)}(0)$ により定まり, n 個の関数からなる基本解をもち, 解空間の次元が n になることが知られている.