基底の存在と次元

一般に、ベクトル空間の中の一次独立なベクトルの個数は生成系をなすベクトルの個数を超えないことが示される。

定理 4.3 (生成系と一次独立なベクトルの個数) V が n 個のベクトルからなる生成系 $A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$ を持つとき ($V = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$), V の l 個のベクトルの組 $B = [\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_l]$ について、

(1) $l > n$ ならば $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_l$ は一次従属. (1)* ((1) の対偶) $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_l$ が一次独立ならば $l \leq n$.

($\because$ (1)) B は $n \times l$ K -行列 H を用いて $B = AH$ と表せる. $n < l$ なら $\text{rank } H \leq n < l$ より方程式 $H\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は自明でない解 $\mathbf{x} = \mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ をもつ (定理 2.5(2)). このとき, $B\mathbf{s} = AH\mathbf{s} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ より B は一次従属.

定理 4.4 (基底をなすベクトルの個数の不変性) $A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$, $B = [\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_l]$ が共に V の基底ならば $n = l$.

($\because$) (4.3) (1)*: A が生成系, B が一次独立より $l \leq n$. B が生成系, A が一次独立より $n \leq l$. $\therefore n = l$.

[次元] この定理 4.4 により、ベクトル空間 V が基底をもつとき、基底をなすベクトルの個数 n は基底の取り方によらず一定である。この個数 n ($V = \{\mathbf{0}\}$ のときは 0) を V の **次元** (dimension) といい、

$\dim V$ より詳しくは $\dim_K V$

と表す. ($\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.) このとき、

生成系をなすベクトルの個数 $\geq \dim V \geq$ 一次独立なベクトルの個数

ベクトル空間 V は、次元が有限のとき **有限次元** といい、有限個のベクトルの組で生成されるか $\{\mathbf{0}\}$ のとき **有限生成** というが、これらは同等であることを示す。また、有限次元でないとき **無限次元** という。

定理 4.2(1)* (再掲) $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}]$ が一次独立, $\mathbf{a}_n$ が A の一次結合で表せない $\Rightarrow \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ は一次独立.

定理 4.5 (基底の存在・延長定理) 有限次元ベクトル空間 V の部分空間 $W \neq \{\mathbf{0}\}$ について、

(1) W (特に V) には基底が存在する.

(2) $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r \in W$ が一次独立ならば、これに $\mathbf{b}_{r+1}, \dots, \mathbf{b}_m \in W$ を付け加えて W の基底 $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}$ を構成することが出来る. ((1) は $r=0$ の場合.)

証明 $V = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$ (V の n 個の生成系) とする. 帰納的に、 W のベクトルの組 $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s$ ($r \leq s$) が一次独立とし、 $W_s := \langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s \rangle$ とおく. ((1) $r=0$ のとき $W_0 := \{\mathbf{0}\}$ とする.) $W_s = W$ なら $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s$ は基底になる. $W_s \neq W$ のとき、 $\mathbf{b}_{s+1} \in W$ で $\mathbf{b}_{s+1} \notin W_s$ となるものがある. 定理 4.2(1)* より $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{s+1}$ は一次独立、 $W_{s+1} := \langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{s+1} \rangle$ とし、 $W = W_m = \langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m \rangle$ ($m \leq n$) となるまで繰り返す. この操作は高々 n 回 (=生成系の個数回) で終る (定理 4.3(1)*).

注意 W に生成系が与えられているとき ($W = V$ のとき) は、付け加えるベクトル $\mathbf{b}_{r+1}, \dots, \mathbf{b}_n$, 特に基底をなす $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ は生成系の中から選ぶことができる. また、生成系以外の $\mathbf{b}_{r+1} \notin W_s, \dots, \mathbf{b}_m \notin W_{m-1}$ を選んでも良い. 無限次元の場合は任意の個数 (無限個) の一次独立なベクトルが選び出せることになる.

例 (多項式の空間) 多項式全体の空間 $K[x]$ において $1, x, x^2, \dots$ は一次独立だから無限次元である. 同様に、関数空間や写像空間は一般には無限次元である. n 次以下の多項式の空間 $K[x]_n$ は $1, x, x^2, \dots, x^n$ ($n+1$ 個) が基底になるので $n+1$ 次元である.

系 4.6 数空間 K^n の $\{\mathbf{0}\}$ でない部分空間には基底が存在する.

例題 (基底の延長) $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ に $\mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ を付け加えて $\mathbb{R}^3$ の基底 $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$ を構成せよ.

解答 基本ベクトルの組 $E = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]$ は $\mathbb{R}^3$ の生成系なのでこの中から $\mathbf{a}_3$ を選べばよい. $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]$ の階段行列は

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{より軸列の組 } [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{e}_2] \ (\mathbf{a}_3 := \mathbf{e}_2) \text{ が } \mathbb{R}^3 \text{ の基底になる.}$$

• n 次元ベクトル空間は基底を定め、座標を対応させる事により数空間 K^n と見なせる.

部分空間の次元 以下 $W_1, W_2, \dots$ はベクトル空間 V の部分空間, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}'_1 \in W_1$, $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}'_2 \in W_2$, 等とする.

定理 4.7 (部分空間の部分空間) W_1, W_2 が V の部分空間で、 W_1 が W_2 の部分空間のとき ($W_1 \subset W_2 \subset V$),

(1) $\dim W_1 \leq \dim W_2$. (2) $W_1 \neq W_2 \implies \dim W_1 < \dim W_2$. (2)* $\dim W_1 = \dim W_2 \implies W_1 = W_2$.

($\because$) 基底の延長定理 4.5 より W_1 の基底 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ がとれ、これに付け加えて W_2 の基底 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ ($n \leq m$) が得られる. よって (1) が成り立ち、(2): $W_1 \neq W_2$ ならば $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ の一次結合で表せない W_2 のベクトル $\mathbf{a}_{n+1}$ が存在し、 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n+1}$ が一次独立になる (定理 4.2(1)*). よって $n < n+1 \leq m$ となるので (2) 及び (2) の対偶 (2)* が成り立つ.

定理 4.8 (和空間の次元定理) ベクトル空間 V の部分空間 W_1, W_2 に対して

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

証明 $\dim(W_1 \cap W_2) = n$, $\dim W_1 = n + \ell$, $\dim W_2 = n + m$ として, $\dim(W_1 + W_2) = n + \ell + m$ を示せばよい.

基底の延長定理 4.5 より $W_1 \cap W_2$ の基底 $A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$ がとれ, $B = [\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_\ell]$ を付け加えて W_1 の基底 $[AB] = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n \mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_\ell]$ と, $C = [\mathbf{c}_1 \cdots \mathbf{c}_m]$ を付け加えて W_2 の基底 $[AC] = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n \mathbf{c}_1 \cdots \mathbf{c}_m]$ が構成できる. このとき $[ABC] = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n \mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_\ell \mathbf{c}_1 \cdots \mathbf{c}_m]$ が $W_1 + W_2$ の基底になることを示せばよい.

[B2](生成系): $\mathbf{w} \in W_1 + W_2$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_1 \in W_1$, $\mathbf{w}_2 \in W_2$ とする. $[AB]$ は W_1 の生成系, $[AC]$ は W_2 の生成系だから $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in K^n$, $\mathbf{y} \in K^\ell$, $\mathbf{z} \in K^m$ により $\mathbf{w}_1 = A\mathbf{x} + B\mathbf{y}$, $\mathbf{w}_2 = A\mathbf{x}' + C\mathbf{z}$, と表される. このとき

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = (A\mathbf{x} + B\mathbf{y}) + (A\mathbf{x}' + C\mathbf{z}) = A(\mathbf{x} + \mathbf{x}') + B\mathbf{y} + C\mathbf{z}$$

と表され, $[ABC]$ は $W_1 + W_2$ の生成系になる.

[B1](一次独立性): 線形関係式: (*) $A\mathbf{x} + B\mathbf{y} + C\mathbf{z} = \mathbf{0}$ を考える. 移項して

$$A\mathbf{x} + B\mathbf{y} = C(-\mathbf{z}), \quad (A\mathbf{x} + B\mathbf{y} \in W_1, \quad C(-\mathbf{z}) \in W_2) \quad \therefore A\mathbf{x} + B\mathbf{y} = C(-\mathbf{z}) \in W_1 \cap W_2.$$

(左辺は W_1 の元, 右辺は W_2 の元なので, 両辺共に $W_1 \cap W_2$ の元.) 特に右辺は $C(-\mathbf{z}) = A\mathbf{x}'$ と表されるので

$A\mathbf{x}' + C\mathbf{z} = \mathbf{0}$. $[AC]$ は W_2 の基底で, 一次独立だから $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. ($\mathbf{x}' = \mathbf{0}$). これを上式 (*) に代入すれば

$A\mathbf{x} + B\mathbf{y} = \mathbf{0}$. $[AB]$ は W_1 の基底で, 一次独立だから $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ と合わせて $[ABC]$ は一次独立.

以上より $[ABC]$ は $W_1 + W_2$ の基底となり定理が成り立つ.

[直和] 和空間 $W = W_1 + W_2$ のベクトル $\mathbf{w} \in W$ を $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_1 \in W_1$, $\mathbf{w}_2 \in W_2$ と表す仕方が一意的, 即ち $\mathbf{w} = \mathbf{w}'_1 + \mathbf{w}'_2$, $\mathbf{w}'_1 \in W_1$, $\mathbf{w}'_2 \in W_2$ と表されたらとすれば $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}'_1$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}'_2$ が成り立つとき, 和空間 W は W_1 と W_2 の直和であるといい, 次の様に表す:

$$V = W_1 \oplus W_2 \quad \text{または} \quad V = W_1 \dot{+} W_2 \quad (\text{和の順序にはよらない})$$

定理 4.9(直和と次元) ベクトル空間 V の部分空間 W_1, W_2 の和空間 $W = W_1 + W_2$ について 次は同値:

$$(1) \quad W = W_1 \oplus W_2. \quad (\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}'_1 + \mathbf{w}'_2, \quad \mathbf{w}_1, \mathbf{w}'_1 \in W_1, \quad \mathbf{w}_2, \mathbf{w}'_2 \in W_2 \Rightarrow \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}'_1, \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}'_2.)$$

$$(2) \quad W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}. \quad (3) \quad \dim W = \dim W_1 + \dim W_2.$$

($\because$) (2) $\Leftrightarrow$ (3) は $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 0$ と次元定理 4.8 より出る.

(1) $\Rightarrow$ (2): $\mathbf{w} \in W_1 \cap W_2$ なら $\mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{0}$, $\mathbf{w} \in W_1$, $\mathbf{0} \in W_2$, $\mathbf{w} = \mathbf{0} + \mathbf{w}$, $\mathbf{0} \in W_1$, $\mathbf{w} \in W_2$ と 2 通りに表せるので

(1) より $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. $\therefore$ (2) $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ を得る.

(2) $\Rightarrow$ (1): $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}'_1 + \mathbf{w}'_2$, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}'_1 \in W_1$, $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}'_2 \in W_2$ とするとき

$$\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}'_1 = \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2, \quad \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}'_1 \in W_1, \quad \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2 \in W_2$$

より 両辺共に $W_1 \cap W_2$ の元. (2) より $\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}'_1 = \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$. $\therefore \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}'_1$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}'_2$. よって (1) が成り立つ.

V の有限個の部分空間 $W_1, W_2, \dots, W_k$ ($k \geq 3$) でも同様に, これらの元の和全体 W として和空間が定義される:

$$W = W_1 + W_2 + \cdots + W_k = \sum_{i=1}^k W_i = \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_1 \in W_1, \mathbf{x}_2 \in W_2, \dots, \mathbf{x}_k \in W_k\}$$

このとき $\dim W \leq \dim W_1 + \cdots + \dim W_k$. ($W_1, \dots, W_k$ の基底を全て合わせれば W の生成系になるから.)

特に表し方が一意的であるとき, 和空間 W は $W_1, W_2, \dots, W_k$ の直和であるといい, 次の様に表す:

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k = \bigoplus_{i=1}^k W_i, \quad \text{または} \quad W = W_1 \dot{+} W_2 \dot{+} \cdots \dot{+} W_k$$

[直和の例] $[a, b, c]$ が一次独立なら $\langle a, b, c \rangle = \langle a, b \rangle \oplus \langle c \rangle = \langle a \rangle \oplus \langle b, c \rangle = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \oplus \langle c \rangle$.

定理 4.9 の拡張として, 定理 4.9 と個数 k に関する数学的帰納法を用いて次が成り立つ.

定理 4.10(直和と次元の一般形) $W = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ であるとき, 次は同値:

$$(1) \quad W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k.$$

$$(2) \quad W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_k) = \{\mathbf{0}\} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

$$(3) \quad \dim W = \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_k.$$

($\because$) $U_i := W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_k$ とおく. $U_i + W_i = W$ であり, (2) $\Leftrightarrow U_i \cap W_i = \{\mathbf{0}\}$ ($i = 1, \dots, k$),

(1) $\Leftrightarrow W = U_k \oplus W_k$ かつ $U_k = W_1 \oplus \cdots \oplus W_{k-1}$ である.

(1) $\Rightarrow$ (3): 定理 4.9 より $\dim W = \dim U_k + \dim W_k$, 帰納法の仮定より $\dim U_k = \sum_{i=1}^{k-1} \dim W_i$ なので (3) が成立.

(3) $\Rightarrow$ (2): 一般に $\dim U_i \leq \sum_{j \neq i} \dim W_j$, $\dim W \leq \dim U_i + \dim W_i$ だが, (3): $\dim W = \sum_{j \neq i} \dim W_j + \dim W_i$

より $\dim U_i \leq \sum_{j \neq i} \dim W_j = \dim W - \dim W_i \leq \dim U_i$ なので $\dim U_i = \sum_{j \neq i} \dim W_j$, $\dim W = \dim U_i + \dim W_i$.

よって定理 4.9 より (2): $U_i \cap W_i = \{\mathbf{0}\}$. (又, $W = U_k \oplus W_k$. 帰納法の仮定により $U_k = W_1 \oplus \cdots \oplus W_{k-1}$ なので (3) $\Rightarrow$ (1) も成立.)

(2) $\Rightarrow$ (1): $\mathbf{x} \in W$ が $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^k \mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}'_j$, ($\mathbf{x}_j, \mathbf{x}'_j \in W_j$) と 2 通りに表されたらとすると,

$$\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}_i = \sum_{j \neq i} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}'_j), \quad \mathbf{x}'_i - \mathbf{x}_i \in W_i, \quad \sum_{j \neq i} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}'_j) \in U_i$$

より, 両辺 $\in W_i \cap U_i \stackrel{(2)}{=} \{\mathbf{0}\}$. よって $\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ ($i = 1, \dots, k$) より (1) が成立.