

一次独立性と部分空間

1つのベクトル(の組) $\mathbf{a}$ は, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ のとき一次独立, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ のとき一次従属である. 一般には次が成り立つ.

(注) 一般に, 命題 $P \Rightarrow Q$ と, その対偶 (Q でない $\Rightarrow P$ でない) は同値なので, 一方を示せば他方も成り立つ.

以下の定理では対偶命題に $\spadesuit$ を付けて併記する. (証明は一方のみ.)

定理 4.1 (一次従属と一次結合) ベクトルの組 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ について,

(1) $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ は一次従属. $\iff \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ のどれかは他のベクトルの一次結合で表せる.

(1) $\spadesuit$ $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ のどれも他のベクトルの一次結合で表せない. $\iff \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ は一次独立.

証明 (1) $(\Rightarrow)$ $\mathbf{a}_1 s_1 + \dots + \mathbf{a}_n s_n = \mathbf{0}$ とする. $s_1 \neq 0$ とすると, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2(-s_2/s_1) + \dots + \mathbf{a}_n(-s_n/s_1)$. 他の場合も同様.

$(\Leftarrow)$ $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 s_2 + \dots + \mathbf{a}_n s_n$ とすると, $\mathbf{a}_1 \cdot (-1) + \mathbf{a}_2 s_2 + \dots + \mathbf{a}_n s_n = \mathbf{0}$. ($s_1 = -1 \neq 0$ より $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ は一次従属. $\square$)

同様にして

定理 4.2 (一次結合と一次独立) ベクトルの組 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ は一次独立とする.

(1) $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}\}$ が一次従属ならば $\mathbf{a}$ は $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ の一次結合で表せる.

(1) $\spadesuit$ $\mathbf{a}$ が $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ の一次結合で表せないならば $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}\}$ は一次独立.

証明 (1) $\mathbf{a}_1 s_1 + \dots + \mathbf{a}_n s_n + \mathbf{a} t = \mathbf{0}$, ${}^t[s_1, \dots, s_n, t] \neq \mathbf{0}$ とする. このとき $t = 0$ と仮定すると, $\mathbf{a}_1 s_1 + \dots + \mathbf{a}_n s_n (+\mathbf{a} 0) = \mathbf{0}$. $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ は一次独立より $s_1 = \dots = s_n = 0$ となり ${}^t[s_1, \dots, s_n, t] \neq \mathbf{0}$ に矛盾.

よって $t \neq 0$. このとき $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1(-s_1/t) + \dots + \mathbf{a}_n(-s_n/t)$ と一次結合で表せた. $\square$

幾何ベクトルの一次独立性 $\mathbf{0}$ でない幾何ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ について,

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が一次従属. $\iff \mathbf{b} = x\mathbf{a}$ と表せる. $\iff \mathbf{a}, \mathbf{b}$ は平行. $\iff O, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ は一直線上にある.

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が一次独立 $\iff O, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ は一直線上にない. $\iff \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ は $O, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ の張る平面になる.

このとき, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が一次従属. $\iff \mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$ と表せる $\iff O, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は同一平面上にある.

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が一次独立. $\iff O, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は同一平面上にない. $\iff \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ は (3次元) 空間全体を張る.

なお, 4つ以上の幾何ベクトルの組は常に一次従属である.

例 $m \times n$ 行列全体 $M_{m,n}(K)$ の基底 (k, ℓ) 成分が 1, 他の成分が全て 0 の $m \times n$ 行列を **行列単位** といい, $E_{k\ell}$ と表す ($(E_{k\ell})_{ij} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$). このとき, これら全体の組 $\{E_{k\ell} \mid 1 \leq k \leq m, 1 \leq \ell \leq n\}$ は $M_{m,n}(K)$ の基底になる.

例 単項式の組の一次独立性 多項式 $f(x)$ と $g(x)$ が「多項式として等しい」とは, 次数が同じで (展開形での) 全ての係数が等しいことを意味し, $f = g$, $f(x) = g(x)$, $f(x) \equiv g(x)$ (恒等的に等しい, 恒等式である) などと表す. 従って, $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0$ は $a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$ を意味する. これより, $1, x, x^2, \dots, x^n$ は一次独立であり, 生成する部分空間 $K[x]_n$ ($= n$ 次以下の多項式全体) の基底になる.

($f(x) = 0$ を方程式と誤解されない様, $f = 0$, $f(x) \equiv 0$ と書くことも多い.)

共通部分, 和空間

ベクトル空間 V の与えられた部分空間 W_1, W_2 から新たに部分空間を作り出す方法として次の2種がある.

共通部分 部分空間 W_1, W_2 の共通部分

$$W_1 \cap W_2 := \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \in W_1 \text{ かつ } \mathbf{v} \in W_2\} \quad (\text{「かつ」の代わりに「,」を用いても良い})$$

は V の部分空間になる. 実際, [S0] $\mathbf{0} \in W_1, \mathbf{0} \in W_2$ より $\mathbf{0} \in W_1 \cap W_2$. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W_1 \cap W_2, s \in K$ とするとき

$$[S1] \mathbf{a} + \mathbf{b} \in W_1, \mathbf{a} + \mathbf{b} \in W_2 \text{ より } \mathbf{a} + \mathbf{b} \in W_1 \cap W_2. [S2] \mathbf{a}s \in W_1, \mathbf{a}s \in W_2 \text{ より } \mathbf{a}s \in W_1 \cap W_2.$$

(又は, [S3] $s, t \in K \Rightarrow \mathbf{a}s + \mathbf{b}t \in W_1, \mathbf{a}s + \mathbf{b}t \in W_2$ より $\mathbf{a}s + \mathbf{b}t \in W_1 \cap W_2$.)

和空間 W_1 のベクトルと W_2 のベクトルの和で表される V の部分集合

$$W_1 + W_2 := \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in V \mid \mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2\} \quad (\text{和の順序にはよらない})$$

は部分空間になる. これを W_1 と W_2 の **和 (空間)** という. ($\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_1$ より $W_1 + W_2 = W_2 + W_1$.)

($\therefore$) [S0] $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in W_1 + W_2$. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W_1 + W_2$ は $\mathbf{a} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2, \mathbf{b} = \mathbf{w}'_1 + \mathbf{w}'_2$ ($\mathbf{w}_1, \mathbf{w}'_1 \in W_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}'_2 \in W_2$) と表せる.

[S3] $s\mathbf{a} + t\mathbf{b} = (s\mathbf{w}_1 + t\mathbf{w}'_1) + (s\mathbf{w}_2 + t\mathbf{w}'_2)$ ($s, t \in K$). W_1, W_2 は部分空間なので $s\mathbf{w}_1 + t\mathbf{w}'_1 \in W_1, s\mathbf{w}_2 + t\mathbf{w}'_2 \in W_2$ より, $s\mathbf{a} + t\mathbf{b} = \text{右辺} \in W_1 + W_2$. $\therefore W_1 + W_2$ は部分空間になる. (又は, [S1] $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}'_1) + (\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}'_2) \in W_1 + W_2$,

[S2] $\mathbf{a}s = (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)s = \mathbf{w}_1 s + \mathbf{w}_2 s \in W_1 + W_2$. $\therefore W_1 + W_2$ は部分空間.)

[和空間と共通部分の例 1] 座標空間において, $W_1 := \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ (xy 平面), $W_2 := \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ (yz 平面) とするとき,

共通部分 $W_1 \cap W_2$ は $\langle \mathbf{e}_2 \rangle$ (y 軸), 和空間は $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle + \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = \mathbb{R}^3$ (全座標空間).

$\langle \mathbf{e}_1 \rangle + \langle \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ (x 軸と y 軸の和空間は xy 平面), $\langle \mathbf{e}_1 \rangle \cap \langle \mathbf{e}_2 \rangle = \{\mathbf{0}\}$ (共通部分は原点 $\mathbf{0}$ のみ.)

[和空間と共通部分の例 2] ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ について

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{c} \rangle, \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \cap \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{b} \rangle$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が $\mathbf{0}$ でない空間の幾何ベクトルで、これらを空間の点と見なすとき、 $\langle \mathbf{a} \rangle$ は原点 $\mathbf{0}$ と $\mathbf{a}$ を通る直線、

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b} \rangle$ は $\mathbf{0}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ の張る平面、

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \cap \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{b} \rangle$ は $\mathbf{0}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ の張る平面と $\mathbf{0}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の張る平面の交線が $\mathbf{0}$ と $\mathbf{b}$ を通る直線であることを表す。

- 一般に $W_1 = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle, W_2 = \langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell \rangle$ と生成系で与えられたとき、 $W_1 + W_2 = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell \rangle$
- $m \times n$ 行列 A と $\ell \times n$ 行列 B (列の個数が同じ) に対し、同次連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}, B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を同時にみたす解、つまりこれらを連立させた、未知数 n 個、方程式数 $m + \ell$ 個の連立方程式 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解全体は 解空間 W_A, W_B の

両方、即ち W_A, W_B の共通部分 $W_A \cap W_B$ になる、 $W_A \cap W_B = \left\{ \mathbf{x} \in K^n \mid \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}$. 基本解はこの基底になる。

- $V = K^m, A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_k], B = [\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_\ell]$ (列ベクトルの組) のとき、行列 $[A, B]$ の軸列の組が和空間 $\langle A \rangle + \langle B \rangle = \langle A, B \rangle$ の基底になり、軸列でない $[A, B]$ の階段行列の、 B の部分の各列が次の関係式を与えるとすると：

$$(*) \quad \mathbf{b}_j = \sum_{i=1}^k \mathbf{a}_i s_i + \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{b}_i t_i \quad (s_i, t_i \in K), \quad \therefore \langle A \rangle \ni \mathbf{c}_j := \sum_{i=1}^k \mathbf{a}_i s_i = \mathbf{b}_j - \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{b}_i t_i \in \langle B \rangle \quad \therefore \mathbf{c}_j \in \langle A \rangle \cap \langle B \rangle.$$

特に B が一次独立のとき、 B の軸列でない全ての列から得られる $\mathbf{c}_j$ の全体が共通部分 $\langle A \rangle \cap \langle B \rangle$ の基底を与える。

例題 次の $\mathbb{R}^3$ の部分空間 W_1, W_2 と、それらの共通部分 $W_1 \cap W_2$, 和空間 $W_1 + W_2$ の基底を求めよ：

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mid x_1 - x_2 = 0 \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mid x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \right\}$$

解答 (1) $x_1 - x_2 = 0$, (2) $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ の基本解 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} =: \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}, \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} =: \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$

がそれぞれ W_1, W_2 の基底になる。(1), (2) を連立させた方程式の係数行列を

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ とおくと } C\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ の基本解が } W_C = W_1 \cap W_2 \text{ の基底になるので, } C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ より, } {}^t[-1 \ -1 \ 1] \text{ が } W_1 \cap W_2 \text{ の基底になる.}$$

$W_1 + W_2$ の基底は、 W_1, W_2 の基底を並べた行列 $[A|B] = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2]$ を作り軸列を選び出せば良いので、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ より } \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ が } W_1 + W_2 \text{ の基底.}$$

$$\text{尚, 階段行列の第 4 列より } \mathbf{b}_2 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_1, \therefore \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

が $W_1 \cap W_2$ の基底になる。

例題 次の $\mathbb{R}^3$ の部分空間 W_1, W_2 の和空間と共通部分の基底を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad W_1 = \langle A \rangle, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mid x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \right\}$$

解答 $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$ とおく。 W_2 の基底が上の例題の (2) で与えられているので、これを $B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2]$ とおいて、行列 $[A \ B]$ を階段行列に変形する。

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \therefore [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{b}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ は } W_1 + W_2 \text{ の基底になる. ここで,}$$

階段行列の第 4 列より $\mathbf{b}_1 = 1\mathbf{a}_1 - 1\mathbf{a}_2$ が共通部分 $W_1 \cap W_2$ の基底になる。 $W_1 \cap W_2$ の基底は次のようにしても求める：

$$B' = [1 \ 1 \ 2] \text{ とおく } (W_2 = W_{B'}). ({}^t A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ の基本解は, } {}^t A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } X = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^t A'.$$

$$\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ より, 基本解 } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{b}_1 \text{ が } W_1 \cap W_2 \text{ の基底になる.}$$

問題 次の $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 に対し、和空間 $W_1 + W_2$ と共通部分 $W_1 \cap W_2$ の基底と次元を求めよ。

$$W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$