

部分空間

$K = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ とし, V を K 上のベクトル空間とする. 従って $V^2, V^3, \mathbb{R}^n$ の様な実ベクトル空間では $K = \mathbb{R}$ とし, スカラー倍として実数倍のみを考え, $\mathbb{C}^n$ の様な複素ベクトル空間では $K = \mathbb{C}$ として複素数倍を考える.

V の部分集合 W が, 零ベクトル $\mathbf{0}$ を含み V での和とスカラー倍に関して閉じているとき, 即ち, 次の性質 [S]:

$$[S0] \quad \mathbf{0} \in W,$$

$$[S1] \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in W \implies \mathbf{a} + \mathbf{b} \in W,$$

$$[S2] \quad \mathbf{a} \in W, s \in K (s \text{ がスカラー}) \implies s\mathbf{a} \in W$$

をみたすとき, W を V の**部分ベクトル空間**, 又は**線型部分空間**, 略して**部分空間** (subspace) という. 零ベクトルのみからなる部分集合 $\{\mathbf{0}\}$ は V の部分空間である. V 自身も V の部分空間とする. V における和, スカラー倍はベクトル空間の公理 [V] をみたすので W においても自動的に満たされ, 部分空間 W もベクトル空間になる.

[S1]+[S2] は次の [S3] と同値:

$$[S3] \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in W, s, t \in K \implies s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \in W.$$

($\because$) ([S3] $\Rightarrow$ [S1]): [S3] で, $s=t=1$ とすれば $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ 等より [S1]. ([S3] $\Rightarrow$ [S2]): $t=0$ とすれば $s\mathbf{a} + 0\mathbf{b} = s\mathbf{a}$ より [S2].

([S1],[S2] $\Rightarrow$ [S3]): [S2] より $s\mathbf{a}, t\mathbf{b} \in W$. [S1] より $s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \in W$.

[S3] より帰納的に, W のベクトルの一次結合はまた W のベクトルになることが分る. 即ち,

$$[S4] \quad \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in W, s_1, \dots, s_k \in K \implies (s_1\mathbf{a}_1 + \dots + s_{k-1}\mathbf{a}_{k-1}) + s_k\mathbf{a}_k \in W$$

$$(A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_k], \mathbf{s} = {}^t[s_1 \cdots s_k] \in K^k \Rightarrow A\mathbf{s} = \mathbf{a}_1s_1 + \dots + \mathbf{a}_ks_k \in W)$$

• W が部分空間であることを示すには, [S0], [S1],[S2] を満たしているかどうかを順に調べれば良い. [S1],[S2] の代りに [S3] を確かめても良い. なお, W が空集合でないときは, [S2] において $s=0$ とおけば $\mathbf{0} = 0\mathbf{a} \in W$ より [S0] が分かるので, [S1],[S2] または [S3] を確かめればよい. また, 部分空間でないことを示すには反例を挙げれば良い.

例題 1(部分空間の判定) 次の $\mathbb{R}^2$ の部分集合が部分空間になるかどうかを調べよ.

$$(1) W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x+y=0 \right\}, (2) W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x+y=1 \right\}, (3) W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x+y \geq 0 \right\}, (4) W_4 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x^2-y^2=0 \right\}$$

解答 以下, $\mathbf{x} = {}^t[x, y]$, $\mathbf{a} = {}^t[a_1, a_2]$, $\mathbf{b} = {}^t[b_1, b_2]$, $s, t \in \mathbb{R}$ とする. $\mathbf{0} = {}^t[0, 0]$ である.

(1) [S0]: $0+0=0$ より $\mathbf{0} = {}^t[0, 0] \in W_1$. 以下, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W_1$ とする, 即ち, $a_1+a_2=0$, $b_1+b_2=0$.

[S1]: $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ は $(a_1+b_1) + (a_2+b_2) = (a_1+a_2) + (b_1+b_2) = 0+0=0$ より $x+y=0$ を満たすので $\mathbf{a}+\mathbf{b} \in W_1$.

よって W_1 は和に関して閉じている.

[S2]: $s\mathbf{a} = {}^t[sa_1, sa_2]$ は $sa_1+sa_2 = s(a_1+a_2) = 0$ より実数倍で閉じている. よって W_1 は部分空間になる.

(2) $\mathbf{x} = \mathbf{0} = {}^t[0, 0]$ は $x+y=1$ を満たさない. よって W_2 は $\mathbf{0} \in W_2$ を満たさないので部分空間ではない.

(3) $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 = {}^t[1, 0]$ は $x+y \geq 0$ を満たすので $\mathbf{e}_1 \in W_3$ だが, $(-1)\mathbf{e}_1 = {}^t[-1, 0]$ は $x+y \geq 0$ を満たさないので W_3 はスカラー倍に関して閉じていない. よって W_3 は部分空間ではない.

(4) $\mathbf{0} \in W_4$, $\mathbf{a}_1 = {}^t[1, 1], \mathbf{a}_2 = {}^t[1, -1] \in W_4$ だが, $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2 = {}^t[2, 0]$ は $x^2-y^2=0$ を満たさないので W_4 は和に関して閉じてない. よって W_4 は部分空間ではない.

問 (1) $W := \{\mathbf{x} = {}^t[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ は部分空間でないことを示せ.

(2) $W := \{\mathbf{x} = {}^t[x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$ は部分空間であることを示せ.

同次連立 1 次方程式の解空間 $m \times n$ K -行列 A に対し, 未知数 n 個の同次連立 1 次方程式の解空間を W_A と表す:

$$W_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \quad (A \text{ が実行列のとき } W_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \text{ (実数解のみを考える)})$$

$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は常に解なので [S0] を満たし, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解 ($A\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $A\mathbf{b} = \mathbf{0}$) のとき, スカラー $s, t \in K$ に対し

$$A(\mathbf{a}s + \mathbf{b}t) = (A\mathbf{a})s + (A\mathbf{b})t = \mathbf{0}s + \mathbf{0}t = \mathbf{0}. \quad \therefore \mathbf{a}s + \mathbf{b}t \in W_A$$

より [S3] をみたすので W_A は部分空間になる. (例題の (1) はその例.)

多項式の空間 K 係数の n 次以下の多項式全体 $K[x]_n$ は, n 次以下の多項式の和, スカラー倍がまた n 次以下の多項式になるので $K[x]$ の部分空間になる.

生成する部分空間 V のベクトルの組 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ の一次結合全体の集合

$$W = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle := \{s_1\mathbf{a}_1 + \dots + s_k\mathbf{a}_k \mid s_1, \dots, s_k \text{ はスカラー}\}$$

は V の部分空間になる. この W を $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ の**生成する** (又は **張る**) **部分空間** という. $A = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_k]$ のときは, $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$ を $\langle A \rangle$ と表す. このとき $W = \langle A \rangle = \{A\mathbf{s} \mid \mathbf{s} \in K^k\}$.

($\because$) [S0]: $s_1 = \dots = s_k = 0$ とおくと $0\mathbf{a}_1 + \dots + 0\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ より $\mathbf{0} \in W$.

[S3]: $A = [a_1 a_2 \cdots a_k]$ とする, $x, y \in W$ はある $s, t \in K^k$ により $x = As, y = At$ と表せる. このとき, $s, t \in K$ に対し, $xs + yt = Ass + Att = A(ss + tt)$ で, $ss + tt \in K^k$ より $xs + yt \in W$.

例 1 (座標空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間) e_1, e_2, e_3 を $\mathbb{R}^3$ の基本ベクトルとすると,

• $\langle e_1 \rangle$ は x 軸, $\langle e_2 \rangle$ は y 軸, $\langle e_3 \rangle$ は z 軸, • $\langle e_1, e_2 \rangle$ は xy 平面, $\langle e_2, e_3 \rangle$ は yz 平面, $\langle e_3, e_1 \rangle$ は zx 平面. (図)

生成系, 基底 ベクトル空間 V (部分空間のときも含む) のベクトルの組 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ は, V の各ベクトル b が $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ の一次結合で表されるとき, 即ち $V = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ のとき V の **生成系** という.

$V = \langle A \rangle$ のとき, V のベクトルの組 $B = [b_1 \cdots b_k]$ の各 b_j はある $h_j \in K^n$ により $b_j = Ah_j$ と表せる. $H = [h_1 h_2 \cdots h_k]$ ($n \times k$ K -行列) とおけば, $B = [b_1 b_2 \cdots b_k] = [Ah_1 Ah_2 \cdots Ah_k] = A[h_1 h_2 \cdots h_k] = AH$ より,

$A = [a_1 \cdots a_n]$ が V の生成系ならば, V のベクトルの組 B はある K -行列 H により $B = AH$ と表せる.

生成系 $\{a_1, \dots, a_n\}$ は, 一次独立のとき V の **基底** といい, $A = [a_1 \cdots a_n]$ を順序付けられた基底という. 即ち, V のベクトルの組 $\{a_1, \dots, a_n\}$ が V の基底であるとは次の条件 [B] をみたすときをいう:

[B1] $\{a_1, \dots, a_n\}$ は一次独立 ($a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n = \mathbf{0} \implies s_1 = \cdots = s_n = 0 \iff s := {}^t[s_1, \dots, s_n] = \mathbf{0}$)).

[B2] $\{a_1, \dots, a_k\}$ は V の生成系 ($V = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \iff V$ のベクトルは $\{a_1, \dots, a_k\}$ の一次結合で表せる).

以下では, 主として順序付けられた基底を用い, 単に基底という.

上の条件 [B1], [B2] より, 一次独立なベクトルの組 $a_1, \dots, a_k$ はそれが生成する部分空間 $W = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ の基底になる. 従って一次独立なベクトルの組の性質は, それが生成する部分空間の基底の性質となる.

数空間 K^n の基底 基本ベクトルの組 $E_n = [e_1, \dots, e_n]$ は K^n の基底になる. これを K^n の**標準基底** という.

数ベクトルの n 個の組 $a_1, \dots, a_n$ は $A := [a_1, \dots, a_n]$ が正則行列のとき基底になる. 実際, $\text{rank } A = n$ より一次独立で, 任意の $b \in K^n$ に対し $b' = {}^t[b'_1, \dots, b'_n] := A^{-1}b$ とおけば, b は $b = AA^{-1}b = Ab' = a_1 b'_1 + \cdots + a_n b'_n$ と $a_1, \dots, a_n$ の一次結合で表せるので生成系, 従って基底になる.

同次連立 1 次方程式の解空間の基底 $m \times n$ K -行列 A に対する同次方程式 $Ax = \mathbf{0}$ の基本解 $\{x_1, \dots, x_{n-r}\}$ ($r = \text{rank } A$) は一次独立, かつ 全ての解は基本解の一次結合で表せるので W_A の生成系, 即ち, 基本解 $\{x_1, \dots, x_{n-r}\}$ は解空間 W_A の基底である. (例 2.13)

注意 一般に, 方程式 $Ax = b$ の任意の解を特殊解といい, $Ax = \mathbf{0}$ の解空間 W_A の基底を基本解という. 第 2 章で与えた特殊解と基本解はその一つである.

• 数空間 K^n の部分空間は, (1) 生成系, (2) 同次連立 1 次方程式の解空間, のいずれかにより与えられることが多い. (2) から (1) は方程式を解くことにより得られるが, 逆に生成系から方程式を求める事も出来る. 例題参照.

例題 1 次の $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組 $A = [a_1 a_2 a_3]$, $B = [b_1 b_2 b_3]$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であるかどうかを調べよ.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

解答 行列 A, B の階数を求め, 正則であるかどうかを判定すればよい.

$$A \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } \text{rank } A = 3, \text{rank } B = 2. \therefore A \text{ は正則であり, } B \text{ は正則でない.}$$

よって, A は $\mathbb{R}^3$ の基底であり, B は $\mathbb{R}^3$ の基底でない. なお, $|A| = 1, |B| = 0$ から分かる.

$$\text{問 1 } \mathbb{R}^3 \text{ のベクトルの組 } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 3 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \text{ は基底になるか.}$$

例題 2 $A = [a_1 a_2 a_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ とするとき, $Ax = \mathbf{0}$ の解空間 W_A の基底と, $A = [a_1 a_2 a_3]$ の生成する部分空間 $\langle A \rangle$ の基底を求めよ.

解答 A を階段行列に変形する: $A \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. このとき基本解 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ が W_A の基底になり, A の軸列の組 a_1, a_2 が $\langle A \rangle$ の基底になる. なお, $a_3 = -a_1 + 2a_2$.

問 2 $A = [a_1 a_2 a_3] = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ とするとき, $Ax = \mathbf{0}$ の解空間 W_A の基底と, $A = [a_1 a_2 a_3]$ の生成する部分空間 $\langle A \rangle$ の基底を求めよ.