行列の余因子

定理 3.18 (次数低下法 (一般形)) 正方行列 $A=[a_{ij}]$ に対し,

$$\begin{vmatrix} A_1 & \mathbf{0} & A_2 \\ * & a_{ij} & * \\ A_3 & \mathbf{0} & A_4 \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & * & A_2 \\ \mathbf{0} & a_{ij} & \mathbf{0} \\ A_3 & * & A_4 \end{vmatrix}.$$

この定理 3.18 で $A_{ij} := \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$ は A から第 i 行と第 j 列を除いた行列であり, A の第 (i,j) **小行列** という. また, その行列式を第 (i,j) **小行列式** といい, それに符号 $(-1)^{i+j}$ を掛けたものを A の 第 (i,j) **余因子** という. これを $\widetilde{a_{ij}}$ と表すとき

$$\widetilde{a_{ij}} = (-1)^{i+j}|A_{ij}| = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

であり, 定理 3.18 は次の様に表せる:

$$\begin{vmatrix} A_1 & \mathbf{0} & A_2 \\ * & a_{ij} & * \\ A_3 & \mathbf{0} & A_4 \end{vmatrix} = a_{ij}\widetilde{a_{ij}} = \begin{vmatrix} A_1 & * & A_2 \\ \mathbf{0} & a_{ij} & \mathbf{0} \\ A_3 & * & A_4 \end{vmatrix} \tag{1}$$

第 (i,j) 余因子に付ける符号 $(-1)^{i+j}$ を $\pm$ で表すと : $\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$

例 1 (2 次行列の余因子) $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の余因子は, $\widetilde{a_{11}} = (-1)^{1+1}d = d, \quad \widetilde{a_{12}} = (-1)^{1+2}c = -c,$
$\widetilde{a_{21}} = (-1)^{2+1}b = -b, \quad \widetilde{a_{22}} = (-1)^{2+2}a = a$

行列式の展開 行列 $A=[a_{ij}]$ の第 1 行 $\boldsymbol{a}^1 = [a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n}]$ は

$$\boldsymbol{a}^1 = [a_{11}\ 0 \cdots 0] + [0\ a_{12}\ 0 \cdots 0] + \cdots + [0 \cdots 0\ a_{1n}]$$

と和で表され, 第 1 行に対する線形性を A の行列式に適用すると, 次数低下法 (一般形) より

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\widetilde{a_{11}} + a_{12}\widetilde{a_{12}} + \cdots + a_{1n}\widetilde{a_{1n}} \end{aligned}$$

が成り立つ. 同様にして次の一般的な展開式が得られる:

定理 3.19 (行列式の余因子展開) n 次正方行列 A に対し 次が成立する.

(1) (第 i 行に関する余因子展開) $\quad |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\widetilde{a_{ij}} \quad (i=1,\ldots,n).$

(2) (第 j 列に関する余因子展開) $\quad |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\widetilde{a_{ij}} \quad (j=1,\ldots,n).$

ある行, またはある列に 0 の多い行列式を計算する場合は余因子展開を用いると有効なことが多い.

余因子行列 余因子 $\widetilde{a_{ij}}$ を並べた行列 $[\widetilde{a_{ij}}]$ の**転置行列**を **余因子行列** といい, ここでは $\widetilde{A}$ と表す. 即ち,

$$\widetilde{A} = {}^t[\widetilde{a_{ij}}], \qquad (\widetilde{A})_{ij} = \widetilde{a_{ji}}$$

このとき, 上の定理 3.19 より

$$(A\widetilde{A})_{ii} = \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\widetilde{A})_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\widetilde{a_{ij}} = |A|, \qquad (\widetilde{A}A)_{jj} = \sum_{i=1}^{n} (\widetilde{A})_{ji}a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{a_{ij}}a_{ij} = |A|$$

一方, $i \neq j$ のとき, A の第 i 行 $\boldsymbol{a}^i$ を $\boldsymbol{x} = [x_1\, x_2\, \cdots\, x_n]$ に置き換えた行列 $A_i(\boldsymbol{x}) = A_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}^j)$ に上の定理 3.19 (1) を (和の添え字 j を k に代えて) 適用すると

$$|A_i(\boldsymbol{x})| = |A_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}^j)| = \sum_{k=1}^{n} x_k \widetilde{a_{ik}}$$

であり, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}^j = [\cdots\ a_{jk}\ \cdots]$ のとき $|A_i(\boldsymbol{a}^j)| = |A_{ij}(\boldsymbol{a}^j, \boldsymbol{a}^j)| = 0$. 従って

$$0 = |A_i(\boldsymbol{a}^j)| = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \widetilde{a_{ik}} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} (\widetilde{A})_{ki} = (A\widetilde{A})_{ji}$$

同様に $i \neq j$ のとき, $(\widetilde{A}A)_{ij} = 0$. よって, 上の定理 3.19 と合わせて,
$(A\widetilde{A})_{ij} = |A|\delta_{ij}$, $(\widetilde{A}A)_{ij} = |A|\delta_{ij}$. 即ち,

定理 3.20 (余因子行列と逆行列) n 次正方行列 A に対し

$$A\widetilde{A} = |A|E_n\,, \qquad \widetilde{A}A = |A|E_n$$

特に A が正則のとき,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A} = |A|^{-1}\widetilde{A}$$

証明 前半は上で示した. A が正則のときは, $|A| \neq 0$ より, $X := |A|^{-1}\widetilde{A}$ とおけば,
$AX = A(|A|^{-1}\widetilde{A}) = |A|^{-1}(A\widetilde{A}) = |A|^{-1}(|A|E) = E$.
同様に, $XA = E$ が示せ, $X = |A|^{-1}\widetilde{A}$ が A の逆行列になる.

例 2 (2次行列の余因子行列と逆行列) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の余因子と余因子行列, および $|A| \neq 0$ のときの逆行列は, 例 1 より,

$$\begin{aligned} \widetilde{a_{11}} &= d, \quad \widetilde{a_{12}} = -c, \\ \widetilde{a_{21}} &= -b, \quad \widetilde{a_{22}} = a, \end{aligned} \qquad \widetilde{A} = \begin{bmatrix} \widetilde{a_{11}} & \widetilde{a_{21}} \\ \widetilde{a_{12}} & \widetilde{a_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

未知数の個数と方程式の個数が一致し, 係数行列が正則な 連立一次方程式の唯 1 組の解を行列式を用いて表す方法がある.

定理 3.21 (Cramer(クラメル)の公式) 未知数の個数と方程式の個数がともに n の連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ $(A = [\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \cdots\, \boldsymbol{a}_n],\ \boldsymbol{x} = {}^t[x_1\, x_2\, \cdots\, x_n])$ は A が正則ならば, その唯 1 組の解は次式で与えられる：

$$x_1 = \frac{|\boldsymbol{b}\, \boldsymbol{a}_2\, \cdots\, \boldsymbol{a}_n|}{|A|},\ x_2 = \frac{|\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{b}\, \boldsymbol{a}_3\, \cdots\, \boldsymbol{a}_n|}{|A|},\ \ldots,\ x_n = \frac{|\boldsymbol{a}_1\, \cdots\, \boldsymbol{a}_{n-1}\, \boldsymbol{b}|}{|A|}.$$

証明 $\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_j x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{a}_j$ と $|\boldsymbol{a}_j\, \boldsymbol{a}_2\, \cdots\, \boldsymbol{a}_n| = 0$ $(j \geqq 2)$ より

$$|\boldsymbol{b}\, \boldsymbol{a}_2 \cdots \boldsymbol{a}_n| = |\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_2 \cdots \boldsymbol{a}_n| = \sum_{j=1}^{n} x_j |\boldsymbol{a}_j\, \boldsymbol{a}_2 \cdots \boldsymbol{a}_n| = x_1 |\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2 \cdots \boldsymbol{a}_n| = x_1 |A|.$$

よって A が正則のとき $|A| \neq 0$ より

$$x_1 = \frac{|\boldsymbol{b}\, \boldsymbol{a}_2\, \cdots\, \boldsymbol{a}_n|}{|A|}.$$

他も同様.