行列式の計算例

基本変形と次数低下法による計算

- 行基本変形 (定理 3.5) を用いて第 1 列を掃き出す.
- 次数低下法 I (定理 3.6) を用いて次数を下げる.
- これらを繰り返して, 1 次または 2 次の行列式の計算に帰着する.

基本的にはこの方法で行列式の値は計算できる. (列基本変形と次数低下法 (一般形) を用いても良い.)
(以下では sr_i は第 i 行から s を括り出す記号とする. sc_i も同様.)

例 1 (行基本変形と次数低下法による計算)

(1) $|A| = \begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&4\\2&4&5\end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-2r_1}}{=} \begin{vmatrix}1&2&3\\0&-2&-2\\0&0&-1\end{vmatrix} \underset{\text{例 12}}{=} 1\cdot(-2)\cdot(-1)=2,$

(2) $|B| = \begin{vmatrix}2&5&5\\2&2&2\\3&4&3\end{vmatrix} \underset{2r_2}{=} 2\begin{vmatrix}2&5&5\\1&1&1\\3&4&3\end{vmatrix} \overset{r_1\leftrightarrow r_2}{=} -2\begin{vmatrix}1&1&1\\2&5&5\\3&4&3\end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-3r_1}}{=} -2\begin{vmatrix}1&1&1\\0&3&3\\0&1&0\end{vmatrix} \underset{3.6}{=} -2\cdot 1\begin{vmatrix}3&3\\1&0\end{vmatrix} \underset{3r_1}{=} -2\cdot 3\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix} = 6$

(3) $|C| = \begin{vmatrix}100&101&102\\101&102&103\\102&102&100\end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}}{=} \begin{vmatrix}100&101&102\\1&1&1\\2&1&-2\end{vmatrix} \overset{\substack{r_1-100r_2\\ r_3-2r_2}}{=} \begin{vmatrix}0&1&2\\1&1&1\\0&-1&-4\end{vmatrix} \overset{r_1\leftrightarrow r_2}{=} -\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&-1&-4\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&2\\-1&-4\end{vmatrix} = 2$

上の例の Sarrus の公式による計算:
(1) $|A| = 1{\cdot}2{\cdot}5+2{\cdot}4{\cdot}2+3{\cdot}2{\cdot}4-3{\cdot}2{\cdot}2-2{\cdot}2{\cdot}5-1{\cdot}4{\cdot}4 = 2.$ (2) $|B| = 2{\cdot}2{\cdot}3+5{\cdot}2{\cdot}3+5{\cdot}2{\cdot}4-5{\cdot}2{\cdot}3-5{\cdot}2{\cdot}3-2{\cdot}2{\cdot}4 = 6.$
(3) $|C| = 100{\cdot}102{\cdot}100 + 101{\cdot}103{\cdot}102 + 102{\cdot}101{\cdot}102 - 102{\cdot}102{\cdot}102 - 101{\cdot}101{\cdot}100 - 100{\cdot}103{\cdot}102 = 2.$

例 2 (4 次の行列式) (Sarrus の公式は使えない.)

(1) $|A| = \begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&2&4&3\\2&4&5&1\\4&8&7&9\end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-2r_1\\ r_4-4r_1}}{=} \begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-2&-2&-5\\0&0&-1&-7\\0&0&-5&-7\end{vmatrix} \underset{3.6}{=} (-2)\begin{vmatrix}-1&-7\\-5&-7\end{vmatrix} \underset{\substack{-r_1\\ -r_2}}{=} (-2)\cdot(-1)^2\begin{vmatrix}1&7\\5&7\end{vmatrix} \overset{r_2-5r_1}{=} -2\begin{vmatrix}1&7\\0&-28\end{vmatrix} = 56,$

(2) $|B| = \begin{vmatrix}1&2&0&2\\-1&1&3&1\\2&2&1&2\\-2&-1&2&-2\end{vmatrix} \overset{\substack{r_2+2r_1\\ r_3-2r_1\\ r_4+2r_1}}{=} \begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&3&3&3\\0&-2&1&-2\\0&3&2&2\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}3&3&3\\-2&1&-2\\3&2&2\end{vmatrix} \underset{3r_1}{=} 3\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&1&-2\\3&2&2\end{vmatrix} \overset{\substack{r_2+2r_1\\ r_3-3r_1}}{=} 3\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\0&3&0\\0&-1&-1\end{vmatrix} = -9$

(1) では $(-2)\begin{vmatrix}-1&-7\\-5&-7\end{vmatrix} \underset{\substack{-c_1\\ -7c_2}}{=} (-2)(-1)(-7)\begin{vmatrix}1&1\\5&1\end{vmatrix} \overset{r_2-5r_1}{=} -14\begin{vmatrix}1&1\\0&-4\end{vmatrix} = (-14)(-4) = 56$ や,
同上 $= (-2)\{(-1)(-7)-(-7)(-5)\} = (-2)(-28) = 56$ としても良い.

例 3 (基本変形と次数低下法 (一般形)(定理 3.17) を用いる例) ((3,3) 成分と (2,3) 成分を用いて次数低下)

$|A| = \begin{vmatrix}4&-1&0&3\\4&2&2&4\\0&2&2&2\\-1&3&0&2\end{vmatrix} \overset{r_2-r_3}{=} \begin{vmatrix}4&-1&0&3\\4&0&0&2\\0&2&2&2\\-1&3&0&2\end{vmatrix} \underset{3.17}{=} (-1)^{3+3}2\begin{vmatrix}4&-1&3\\4&0&2\\-1&3&2\end{vmatrix} \overset{c_1-2c_3}{=} 2\begin{vmatrix}-2&-1&3\\0&0&2\\-5&3&3\end{vmatrix} \underset{3.17}{=} 2(-1)^{2+3}2\begin{vmatrix}-2&-1\\-5&3\end{vmatrix}$
$= (-4)\cdot(-6-(-1)(-5)) = (-4)(-11) = 44$
(上の行の最終式で第 1 行の (-1) を行列式の外に出して計算しても良い.)

例 1 では $|B| = 2\begin{vmatrix}2&5&5\\1&1&1\\3&4&3\end{vmatrix} \overset{\substack{r_1-2r_2\\ r_3-3r_2}}{=} 2\begin{vmatrix}0&3&3\\1&1&1\\0&1&0\end{vmatrix} \underset{3.17}{=} -2\cdot 1\begin{vmatrix}3&3\\1&0\end{vmatrix},\ |C| = \begin{vmatrix}0&1&2\\1&1&1\\0&-1&-4\end{vmatrix} \underset{3,17}{=} -\begin{vmatrix}1&2\\-1&-4\end{vmatrix}$ としても良い.

例 4 対角成分が a, 他の成分が b の n 次の行列式 D_n を求める:
第 2 〜 n 列を第 1 列に加え, 第 1 列を掃き出すと:

$$D_n := \begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&b\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a+(n-1)b&b&b&\cdots&b\\a+(n-1)b&a&b&\cdots&b\\a+(n-1)b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&b\\a+(n-1)b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a+(n-1)b&b&b&\cdots&b\\0&a-b&0&\cdots&0\\0&0&a-b&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&0&\cdots&0&a-b\end{vmatrix} \underset{\text{例 12}}{=} \{a+(n-1)b\}(a-b)^{n-1}$$

余因子展開を併用する方法

例 5 $\begin{vmatrix}x&1&1&0\\1&x-1&0&-1\\-2&-1&x-2&1\\1&1&1&x-1\end{vmatrix} \overset{c_3-c_2}{=} \begin{vmatrix}x&1&0&0\\1&x-1&1-x&-1\\-2&-1&x-1&1\\1&1&0&x-1\end{vmatrix} \underset{\text{第 1 行で展開}}{=} x\begin{vmatrix}x-1&1-x&-1\\-1&x-1&1\\1&0&x-1\end{vmatrix} + (-1)^{1+2}1\begin{vmatrix}1&1-x&-1\\-2&x-1&1\\1&0&x-1\end{vmatrix}$

$= x\{(x-1)^3+(1-x)\cdot 1\cdot 1+0-(-1)(x-1)1-(1-x)(-1)(x-1)+0\}$
$-\{1(x-1)^2+(1-x)1\cdot 1+0-(-1)(x-1)1-(1-x)(-2)(x-1)-0\}$
$= x\{(x-1)^3-(x-1)^2\}-\{-(x-1)^2\} = (x-1)^2\{x(x-1-1)+1\} = (x-1)^2(x-1)^2 = (x-1)^4$

例 6 (3 重対角行列) 対角成分が a, 対角成分の隣の成分が b, c, $(a_{i,i-1}=b,\ a_{i,i+1}=c)$ 他の成分が 0 の n 次の行列式 D_n の 漸化式を求める: 第 1 列で展開し, 第 2 項の次数を下げると:

$$D_1=a,\quad D_2=\begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix}=a^2-bc,\quad D_3=\begin{vmatrix} a & c & 0 \\ b & a & c \\ 0 & b & a \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix}+(-1)^{2+1}b\begin{vmatrix} c & 0 \\ b & a \end{vmatrix}=aD_2-bca,$$

$$D_4=\begin{vmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & a & c & 0 \\ 0 & b & a & c \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}=aD_3+(-1)^{2+1}b\begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ b & a & c \\ 0 & b & a \end{vmatrix}\underset{3.16}{=}aD_3-bc\begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix}=aD_3-bcD_2,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} a & c & & & \\ b & a & c & & \\ & b & a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c \\ & & & b & a \end{vmatrix}=aD_{n-1}-b\begin{vmatrix} c & & & & \\ b & a & c & & \\ & b & a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c \\ & & & b & a \end{vmatrix}\underset{3.16}{=}aD_{n-1}-bcD_{n-2}\quad (D_0{=}1,\ D_{-1}{=}0 \text{ として } n\geqq 1 \text{ で成立})$$

例 7 (余因子行列等) 例 1 の A の余因子行列 $\widetilde{A}$ と逆行列 A^{-1} を求める: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix},\quad |A|=2$

$$\widetilde{a_{11}}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-6,\quad \widetilde{a_{12}}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-2,\quad \widetilde{a_{13}}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=4,$$

$$\widetilde{a_{21}}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=2,\quad \widetilde{a_{22}}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-1,\quad \widetilde{a_{23}}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

$$\widetilde{a_{31}}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=2,\quad \widetilde{a_{32}}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=2,\quad \widetilde{a_{33}}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-2,$$

$$\widetilde{A}={}^t[\widetilde{a_{ij}}]={}^t\begin{bmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix},\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\widetilde{A}=\frac{1}{2}\widetilde{A}=\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & -1/2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

例 8 (Cramer の公式) a, b, c が互いに異なるとき, 次の方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ の解は Cramer の公式により,

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=1 \\ ax+\ by+\ cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases},\quad x=\frac{(d-b)(b-c)(c-d)}{(a-b)(b-c)(c-a)},\ y=\frac{(a-d)(d-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)},\ z=\frac{(a-b)(b-d)(d-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

ここで, 分母は $|A|=(a-b)(b-c)(c-a)$. x, y, z の分子は, $|A|$ の a, b, c をそれぞれ d に置き換えたもの.
尚, これらの行列式は下に述べる Vandermonde の行列式なので, 値が差積になることが分る.

例 9 (分割行列の行列式) 一般に $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}\overset{c_1+c_2}{=}\begin{vmatrix} A{+}B & B \\ B{+}A & A \end{vmatrix}\overset{r_2-r_1}{=}\begin{vmatrix} A{+}B & B \\ O & A{-}B \end{vmatrix}=|A{+}B|\cdot|A{-}B|$ より

$$\begin{vmatrix} a{+}b{+}c & a{+}b & a & a \\ a{+}b & a{+}b{+}c & a & a \\ a & a & a{+}b{+}c & a{+}b \\ a & a & a{+}b & a{+}b{+}c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2a{+}b{+}c & 2a{+}b \\ 2a{+}b & 2a{+}b{+}c \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b{+}c & b \\ b & b{+}c \end{vmatrix}=(4a{+}2b{+}c)c(2b{+}c)c=c^2(4a{+}2b{+}c)(2b{+}c).$$

(第 2 辺 $=\{(2a{+}b{+}c)+(2a{+}b)\}\{(2a{+}b{+}c)-(2a{+}b)\}\{(b{+}c)+b\}\{(b{+}c)-b\}=$ 第 3 辺 (上を適用した).)

特殊で有用な行列式： Vandermonde（ヴァンデルモンド） の行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqq i<j\leqq n}(x_j-x_i)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\leqq i<j\leqq n}(x_i-x_j)$$

ここで, 左辺を Vandermonde の行列式という. また, 中辺 (および右辺) を **差積**といい, $1\leqq i<j\leqq n$ となる組 (i, j) 全てにわたる $\frac{n(n-1)}{2}$ 項の積である.
計算 左辺の行列式の下の行から順に, すぐ上の行の x_1 倍を引いていき ($r_n{-}x_1r_{n-1}$, $r_{n-1}{-}x_1r_{n-2}$, $\ldots$, $r_2{-}x_1r_1$), 次数を 1 つ下げ, 各列から共通因数 $(x_j{-}x_1)$ を行列式の外に括り出すと

$$\text{左辺}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2{-}x_1 & x_3{-}x_1 & \cdots & x_n{-}x_1 \\ 0 & (x_2{-}x_1)x_2 & (x_3{-}x_1)x_3 & \cdots & (x_n{-}x_1)x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (x_2{-}x_1)x_2^{n-2} & (x_3{-}x_1)x_3^{n-2} & \cdots & (x_n{-}x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix}=\prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

以下帰納的に, 左辺 $=\prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)\times\prod_{j=3}^{n}(x_j-x_2)\times\cdots\times(x_n-x_{n-1})=$ 右辺.
別証 左辺 V は $x_1, \ldots, x_n$ の $1{+}2{+}\cdots{+}(n{-}1)=\frac{1}{2}n(n-1)$ 次の多項式で, $x_i{=}x_j$ とすると V は ($c_i{=}c_j$ より) 0 になる. よって因数定理により $x_j{-}x_i$ は V の因数になる. これが $i{\neq}j$ なる全ての i, j に対して成り立つので V は差積で割り切れるが, 次数が等しいので V は差積の定数倍 (c 倍) になる. 両辺の $x_2x_3^2\cdots x_n^{n-1}$ の係数は 1 なので $c{=}1$ で, 両辺は等しい.

終結式 (resultant, Sylvester（シルヴェスター）の行列式) と判別式 n 次と m 次の多項式

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \ (a_n \neq 0), \quad g(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0 \ (b_m \neq 0)$$

に対し, 次の $(m+n)$ 行列 R の行列式 $r(f,g) = |R|$ を**終結式 (resultant)** (**Sylvester の行列式**) という.

$$R = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & & & O \\ & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & & \\ O & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 & & & \\ & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 & & O \\ O & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 \end{bmatrix}, \quad R \begin{bmatrix} x^{n+m-1} \\ x^{n+m-2} \\ \vdots \\ x^n \\ \vdots \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x)x^{m-1} \\ f(x)x^{m-2} \\ \vdots \\ f(x) \\ g(x)x^{n-1} \\ \vdots \\ g(x) \end{bmatrix} \qquad \cdots (*)$$

即ち R は, $(m+n-1)$ 次 (以下) の $(m+n)$ 個の連立方程式 $f(x)x^{m-1}=0, \ldots, f(x)=0,\ g(x)x^{n-1}=0, \ldots, g(x)=0$ の係数行列, つまりこれらの方程式中の $x^{n+m-1}, \ldots, x, 1$ を $x_1, \ldots, x_{n+m-1}, x_{n+m}$ に置き換えて得られる連立一次方程式の係数行列である. このとき

> **定理 1** $f(x) = 0,\ g(x) = 0$ は共通根 (=共通解) をもつ $\Leftrightarrow r(f,g) = 0$

また, $f(x) = 0$ が重根をもつ $\Leftrightarrow f'(x) = na_nx^{n-1} + \cdots + a_1$ と $f(x) = 0$ が共通根をもつ $\Leftrightarrow r(f, f') = 0$, より

$$r(f, f') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n D(f), \quad D(f) := (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} r(f, f')/a_n$$

とおき, $D(f)$ を f の**判別式 (discriminant)** という. $f(x) = ax^2 + bx + c$ のとき

$$r(f, f') = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix} = ab^2 + 4a^2c - 2ab^2 = 4a^2c - ab^2 = -a(b^2 - 4ac),\ D(f) = b^2 - 4ac$$

定理 1 の証明 ($\Rightarrow$) $f(\alpha)=0,\ g(\alpha)=0$ とすると連立一次方程式 $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は自明でない解 $\boldsymbol{x} = {}^t[\alpha^{n+m-1} \cdots \alpha\, 1]$ をもつ, $\therefore$ rank $R < m+n$. $\Leftrightarrow R$ は正則でない $\Leftrightarrow r(f,g) = |R| = 0$.

($\Leftarrow$) R の余因子行列 $\widetilde{R}$ は $\widetilde{R}R = |R|E$ をみたすので, 上の式 $(*)$ の右の式の両辺に左から $\widetilde{R}$ を掛ける. 最下行 (=$n+m$ 行) に注目して $\widetilde{R}$ の最下行を $[c_1 \cdots c_m\, d_1 \cdots d_n]$ とすれば

$$|R|E \begin{bmatrix} x^{n+m-1} \\ \vdots \\ x^n \\ \vdots \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = \widetilde{R} \begin{bmatrix} f(x)x^{m-1} \\ \vdots \\ f(x) \\ g(x)x^{n-1} \\ \vdots \\ g(x) \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} &\text{最下行: } |R|1 = \\ &c_1f(x)x^{m-1} + \cdots + c_mf(x) + d_1g(x)x^{n-1} + \cdots + d_ng(x) \\ &= (c_1x^{m-1} + \cdots + c_m)f(x) + (d_1x^{n-1} + \cdots + d_n)g(x) \\ &= h(x)f(x) + k(x)g(x) \\ &(h(x) = c_1x^{m-1} + \cdots + c_m,\ k(x) = d_1x^{n-1} + \cdots + d_n) \end{aligned}$$

即ち $r(f,g)=|R| = h(x)f(x) + k(x)g(x)$. $r(f,g)=0$ のとき $h(x)f(x) = -k(x)g(x)$. $k(x)$ は $n-1$ 次以下, $h(x)$ は $m-1$ 次以下で, それぞれ $g(x)$, $f(x)$ より低次なので $f(x)$ と $g(x)$ は共通因数をもつ. ($h(x)$ と $k(x)$ からこれらの共通因数を除いたものを $h_1(x)$, $k_1(x)$ とすれば $g(x), f(x)$ は $h_1(x), k_1(x)$ で割り切れ, $f(x)/k_1(x) = -g(x)/h_1(x)$ が $f(x)$ と $g(x)$ の (1 次以上の) 共通因数になる.)