

行列式の性質

まず n 次正方行列 A を行分割して行に関する性質を調べる. A の第 i 行 $\mathbf{a}^i$ のみを $\mathbf{b}$ に置き換えた行列を $A_i(\mathbf{b})$, A の第 i 行 $\mathbf{a}^i$ と第 j 行 $\mathbf{a}^j$ をそれぞれ $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ に置き換えた行列を $A_{ij}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ とする.

$$A = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}^i \\ \vdots \\ \mathbf{a}^j \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad A_i(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^j \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad A_{ij}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{c} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} A_i(\mathbf{a}^i) = A \\ A_{ij}(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j) = A \\ A_{ij}(\mathbf{b}, \mathbf{a}^j) = A_i(\mathbf{b}) \end{cases}$$

($\vdots$ の部分は A と同じ)

定理 3.2 (行列式の基本的性質)

(I) 多重線型性 (n 重線型性) 正方行列 A のある行 $\mathbf{a}^i$ が

(1) $\mathbf{a}^i = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ のとき, $|A| = |A_i(\mathbf{a}^i)| = |A_i(\mathbf{b})| + |A_i(\mathbf{c})|$. (1つの行の和は行列式の和に分れる.)

(2) $\mathbf{a}^i = s\mathbf{b}$ のとき, $|A| = |A_i(\mathbf{a}^i)| = s|A_i(\mathbf{b})|$.

(1つの行を定数倍 (s 倍) すれば, 行列式の値も定数倍 (s 倍) になる.) 即ち

$$(1) |A| = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{b} + \mathbf{c} \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{c} \\ \vdots \end{vmatrix}, \quad (2) |A| = \begin{vmatrix} \vdots \\ s\mathbf{b} \\ \vdots \end{vmatrix} = s \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \end{vmatrix}$$

((1),(2) の性質を合わせて線型性という. 各行について線形なので, n 行で n 重 (多重) 線形性という.)

(II) 交代性 A の2つの行 $\mathbf{a}^i$ と $\mathbf{a}^j$ を入れ替える (行の互換を行う) と符号が変わる: 即ち

$$|A| = |A_{ij}(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j)| = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}^i \\ \vdots \\ \mathbf{a}^j \\ \vdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}^j \\ \vdots \\ \mathbf{a}^i \\ \vdots \end{vmatrix} = -|A_{ij}(\mathbf{a}^j, \mathbf{a}^i)|$$

(III) 正規性 単位行列 E の行列式は 1. ($|E| = 1$.)

以上3つが行列式の最も基本的な性質であり, この性質で行列式が決定される.

証明 (I)(多重線型性): $\mathbf{b} = [b_{i1} \cdots b_{in}]$, $\mathbf{c} = [c_{i1} \cdots c_{in}]$ とすると,

(I-1) $|A| = \sum \varepsilon(\mathbf{p}) \cdots a_{ip_i} \cdots = \sum \varepsilon(\mathbf{p}) \cdots (b_{ip_i} + c_{ip_i}) \cdots = \sum \varepsilon(\mathbf{p}) \cdots b_{ip_i} \cdots + \sum \varepsilon(\mathbf{p}) \cdots c_{ip_i} \cdots = \text{右辺}$.

(I-2) $|A| = \sum \varepsilon(\mathbf{p}) \cdots a_{ip_i} \cdots = \sum \varepsilon(\mathbf{p}) \cdots (s b_{ip_i}) \cdots = s \left(\sum \varepsilon(\mathbf{p}) \cdots b_{ip_i} \cdots \right) = s |A_i(\mathbf{b})| = \text{右辺}$.

(II)(交代性): 互換を行うと符号が変わるので $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(\cdots p_i \cdots p_j \cdots) = -\varepsilon(\cdots p_j \cdots p_i \cdots) = -\varepsilon(\mathbf{pt})$ ($\mathbf{t} = (i, j)$) より

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon(\cdots p_i \cdots p_j \cdots) (\cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots) = (-1) \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon(\cdots p_j \cdots p_i \cdots) (\cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots) \\ &= (-1) \sum_{\mathbf{pt}} \varepsilon(\cdots p_j \cdots p_i \cdots) (\cdots a_{jp_j} \cdots a_{ip_i} \cdots) = -|A_{ij}(\mathbf{a}^j, \mathbf{a}^i)| = \text{右辺} \end{aligned}$$

($\mathbf{p}$ が n 次の置換全体を動くとき, $\mathbf{pt}$ も n 次の置換全体を動く.) □

注意 A のある行 $\mathbf{a}^i$ が一次結合 $\mathbf{a}^i = \sum_{k=1}^r s_k \mathbf{b}_k$ のとき, 線型性 (定理 3.2[I]) (1),(2) を繰り返し用いれば,

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ \sum_{k=1}^r s_k \mathbf{b}_k \\ \vdots \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} \vdots \\ \sum_{k=1}^{r-1} s_k \mathbf{b}_k \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots \\ s_r \mathbf{b}_r \\ \vdots \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \cdots \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=1}^r \begin{vmatrix} \vdots \\ s_k \mathbf{b}_k \\ \vdots \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \sum_{k=1}^r s_k \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{b}_k \\ \vdots \end{vmatrix} \quad (\text{行列式の一次結合})$$

系 3.3

A の第 i 行を第 1 行に移し, 第 1 ~ $(i-1)$ 行を 1 つずつ下にずらした行列を A' とするとき,

$$|A| = (-1)^{i-1} |A'|$$

証明 A' は A の行に巡回置換 $(1, 2, \dots, i)^{-1}$ を行った行列であり, これは隣接互換を $(i-1)$ 回繰り返せばえられるので交代性 (定理 3.2[II]) より系が成り立つ. □

行列式の行に対する性質 行列式の基本性質より以下の種々の性質が導かれる。

定理 3.4 (値が 0 になる行列式)

次の行列 A の行列式の値は 0 になる:

- (1) ある行の成分が全て 0. ($\mathbf{a}^i = \mathbf{0} \Rightarrow |A| = |A_i(\mathbf{0})| = 0$)
 - (2) ある 2 つの行が等しい. ($\mathbf{a}^i = \mathbf{a}^j, i \neq j \Rightarrow |A| = |A_{ij}(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j)| = 0$)
 - (3) ある行が他の行に比例している. ($\mathbf{a}^j = s\mathbf{a}^i, i \neq j \Rightarrow |A| = |A_{ij}(\mathbf{a}^i, s\mathbf{a}^i)| = 0$)
- ((1),(2) は (3) において, それぞれ $s = 0, s = 1$ とした特別な場合である.)

証明 (1) 多重線形性 (2) において, $s = 0, \mathbf{a}^i = \mathbf{00}$ とすればよい: 即ち $|A| = |A_i(\mathbf{a}^i)| = |A_i(\mathbf{00})| = 0|A_i(\mathbf{0})| = 0$

(2) $\mathbf{a}^i = \mathbf{a}^j$ より この 2 つの行を入れ換えても行列および行列式の値は変わらない. 一方, 交代性 (2 つの行を入れ換えると行列式は (-1) 倍) より $|A| = |A_{ij}(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j)| = -|A_{ij}(\mathbf{a}^j, \mathbf{a}^i)| = -|A|$ となり $|A| = 0$ を得る.

((1),(2) は行列式の定義から直接導くことも出来る.)

(3) $\mathbf{a}^j = s\mathbf{a}^i$ より多重線形性 (2) と上の (2) を用いて, $|A| = |A_{ij}(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j)| = |A_{ij}(\mathbf{a}^i, s\mathbf{a}^i)| = s|A_{ij}(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^i)| = 0$. $\square$

定理 3.5 (行基本変形と行列式)

- (R1) ある行を s 倍すると行列式の値も s 倍になる. (sr_i .)
- (R2) ある行に他の行の s 倍を加えても行列式の値は変わらない. ($r_i + sr_j$.)
- (R3) 2 つの行を入れ替えると行列式の値は (-1) 倍になる. ($r_i \leftrightarrow r_j$.)

証明 (R1) は多重線形性 (2), (R3) は交代性そのものである.

(R2): A は $r_i + sr_j$ により $\mathbf{a}^i$ を $\mathbf{a}^i + s\mathbf{a}^j$ に変えた行列 $A_{ij}(\mathbf{a}^i + s\mathbf{a}^j, \mathbf{a}^j)$ になるので, 多重線形性 (1) と直前の定理 ??

(3) により, $|A_{ij}(\mathbf{a}^i + s\mathbf{a}^j, \mathbf{a}^j)| = |A_{ij}(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j)| + |A_{ij}(s\mathbf{a}^j, \mathbf{a}^j)| = |A_{ij}(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j)| + 0 = |A|$ $\square$

この定理の特に (R2) により, ある列を掃き出しても行列式の値は変化しないことが分かった. 掃き出された行の行列式には次の定理が有効である.

定理 3.6 (次数低下法 I)

行列の第 1 列や最下行が掃き出されているとき:

$$(1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \left(\begin{vmatrix} a_{11} & * \\ \mathbf{0} & A' \end{vmatrix} = a_{11} |A'| \right)$$

$$(2) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} a_{nn} \quad \left(\begin{vmatrix} A'' & * \\ \mathbf{0} & a_{nn} \end{vmatrix} = |A''| a_{nn} \right)$$

証明 まず, 下の (2) 式を示す. この左辺では $a_{n1} = \cdots = a_{n,n-1} = 0$ なので $|A| = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon(\mathbf{p}) a_{1p_1} \cdots a_{np_n}$ の中の $p_n = n$ 以外の項は 0. 即ち $\mathbf{p} = (p_1 \cdots p_{n-1} n)$ となる項のみ残る. これは $1, \dots, n-1$ の置換 $\mathbf{p}' = (p_1 \cdots p_{n-1})$ とみなせ, $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p}')$. 和は $(n-1)$ 次の置換全体にわたってとることになる. よって,

$$\text{左辺} = \sum_{\mathbf{p}=(p_1 \cdots p_{n-1}, n)} \varepsilon(\mathbf{p}) a_{1p_1} \cdots a_{n-1,p_{n-1}} a_{nn} = \left(\sum_{\mathbf{p}'=(p_1, \dots, p_{n-1})} \varepsilon(\mathbf{p}') a_{1p_1} \cdots a_{n-1,p_{n-1}} \right) a_{nn} = \text{右辺}$$

(1) 式も同様に, 左辺では $a_{21} = \cdots = a_{n1} = 0$ なので $a_{1p_1} \cdots a_{np_n}$ の中で a_{11} 以外の a_{i1} を含む項は 0. 即ち, $i \geq 2$ ならば $p_i \geq 2$ となる $\mathbf{p} = (1, p_2, \dots, p_n)$ の項しか残らない. この $\mathbf{p}$ は $2, \dots, n$ の置換 $\mathbf{p}' = (p_2 \cdots p_n)$ とみなせ, $\mathbf{p}$ と $\mathbf{p}'$ の転倒数は同じなので $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p}')$. 和は $2, \dots, n$ の $(n-1)$ 次の置換全体にわたる. よって,

$$|A| = \sum_{\mathbf{p}=(1, p_2, \dots)} \varepsilon(\mathbf{p}) a_{11} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = a_{11} \left(\sum_{\mathbf{p}'=(p_2, \dots)} \varepsilon(\mathbf{p}') a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \right) = \text{右辺} \quad \square$$

例 (上三角行列) この定理を繰り返し用いることにより次が分る:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdots a_{nn}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ & & a_{kk} & * \\ & & & A' \end{vmatrix} = a_{11} \cdots a_{kk} |A'|, \quad \begin{vmatrix} A'' & & * \\ & a_{kk} & * \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = |A''| a_{kk} \cdots a_{nn}$$

$$\text{特に:} \quad \begin{vmatrix} E & C \\ O & A' \end{vmatrix} = |A'|, \quad \begin{vmatrix} A'' & C \\ O & E \end{vmatrix} = |A''|$$

掃き出しと次数低下法を用いれば (3 次も含め) 次数の大きな行列式の計算もできる.