

置換の符号の変化

よく使う操作として、2つの行を入れ替えたり、下にある行を第1行に持っていく操作があるが、その準備としてこれらに対応する置換の符号の変化を調べておく。

n 次の置換 $p = (p_1 p_2 \dots p_n)$ は $1, 2, \dots, n$ を $p_1, p_2, \dots, p_n$ にうつす関数 (変換, 写像ともいう) と考えられる。即ち、

$$p(1) = p_1, \quad p(2) = p_2, \quad \dots, \quad p(n) = p_n$$

置換は $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ と表すことがある。この場合、上下の対応のみが問題であり、列の並び順は上の行が $1, 2, \dots, n$ になる必要はない。従って、例えば $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \dots$ (上の行を $\mathbf{1}_n = (1 \dots n)$ にしたときの下の行が順列としての記法 $(p_1 \dots p_n)$ である。)

2つの置換 p, q の合成関数 (合成変換) を p, q の合成 あるいは 積 といい、 qp と表す。即ち、

$$(qp)(i) = q(p(i)) = q(p_i) \quad (i = 1, \dots, n)$$

また、 p の逆関数 (逆変換) を 逆置換 といい p^{-1} と表す：

$$p^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

置換は $1, 2, \dots, n$ を $p_1, p_2, \dots, p_n$ に並べ替える操作とも考えられる。

- 単位置換 (恒等置換) $\mathbf{1}_n$ はなにも動かさない置換で、 $p\mathbf{1}_n = p = \mathbf{1}_n p$ 。
- i と j ($i \neq j$) を入れ換え、他のものを動かさない置換を 互換 といい、 (i, j) で表す。即ち $t = (i, j)$ とすると、 $t(i) = j$, $t(j) = i$, $k \neq i, j$ のとき $t(k) = k$ である。また、 $(i, j) = (j, i) = (i, j)^{-1}$ 。このとき、積 $pt = p(i, j)$ は

$$(pt)(i) = p(t(i)) = p(j) = p_j, \quad (pt)(j) = p(i) = p_i$$

即ち p_i (順列 p の i 番目) と p_j (j 番目) を入れ換えた置換になる。

- 特に $j = i+1$ のとき、 $(i, i+1)$ を 隣接互換 といい、ここでは t_i と表す。隣接互換の転倒数は 1, 符号は (-1) である。即ち、 $\text{sgn } t_i = \varepsilon(t_i) = -1$ 。
- 一般に、 n までの相異なる自然数の列 $i_1, \dots, i_k$ に対し、 $p(i_\ell) = i_{\ell+1}$ ($\ell < k$)、 $p(i_k) = i_1$ で他は動かさない置換 p を 巡回置換 といい、 $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ と「,」で区切って表す。ここでは連続した数による巡回置換

$$t = (i, i+1, \dots, j) = \begin{pmatrix} \dots & i & i+1 & \dots & j-1 & j & \dots \\ \dots & i+1 & i+2 & \dots & j & i & \dots \end{pmatrix} \quad (i < j)$$

と逆置換 t^{-1} を考える。 t は i から j の間を回す置換である。 $(j = i+1$ のときは隣接互換 $(i, i+1)$.) t^{-1} は

$$t^{-1} = \begin{pmatrix} \dots & i+1 & i+2 & \dots & j & i & \dots \\ \dots & i & i+1 & \dots & j-1 & j & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & i & i+1 & \dots & j & \dots \\ \dots & j & i & \dots & j-1 & \dots \end{pmatrix} = (j, \dots, i)$$

より逆順の巡回置換 $(j, j-1, \dots, i)$ になる。置換 $p = (p_1 \dots p_n)$ に対し、

$$pt = \begin{pmatrix} \dots & i & \dots & j-1 & j & \dots \\ \dots & p_{i+1} & \dots & p_j & p_i & \dots \end{pmatrix}, \quad p(t^{-1}) = \begin{pmatrix} \dots & i & i+1 & \dots & j & \dots \\ \dots & p_j & p_i & \dots & p_{j-1} & \dots \end{pmatrix}$$

より、 pt は p の i 番目 p_i を j 番目に移し、 $i+1$ 番目から j 番目を 1 つ前に移した置換、即ち、 i 番目から j 番目までを回した置換で、 $p(t^{-1})$ は j 番目 p_j を i 番目に移し、 i 番目から $j-1$ 番目を 1 つ後に移した (逆に回した) 置換である。

補題 1 置換 $p = (p_1 p_2 \cdots p_n)$ に対し,

(1) p_i と p_{i+1} を入れ換える (隣接互換 t_i を右から掛ける) と符号が変わる.

$$\varepsilon(pt_i) = \varepsilon(\cdots p_{i+1} p_i \cdots) = (-1)\varepsilon(p) = \varepsilon(p)\varepsilon(t_i)$$

(2) 巡回置換 $t = (i, i+1, \dots, j)$ とその逆置換 t^{-1} は

$$t = (i, i+1) \cdots (j-1, j) = t_i t_{i+1} \cdots t_{j-1}, \quad t^{-1} = t_{j-1} \cdots t_{i+1} t_i$$

と $(j-i)$ 個の隣接互換の積で表せる. pt の符号 $\varepsilon(pt)$ は

$$\begin{aligned} \varepsilon(pt) &= \varepsilon(\cdots p_{i+1} \cdots p_j p_i \cdots) = (-1)^{j-i} \varepsilon(p) \quad (= \varepsilon(p)\varepsilon(t)) \\ \varepsilon(pt^{-1}) &= \varepsilon(\cdots p_j p_i \cdots p_{j-1} \cdots) = (-1)^{j-i} \varepsilon(p) \quad (= \varepsilon(p)\varepsilon(t^{-1})) \end{aligned}$$

特に, 巡回置換 $t = (i, i+1, \dots, j)$, t^{-1} の符号は共に $(-1)^{j-i}$.

(3) p_i と p_j を入れ換えると (互換 (i, j) を掛けると) 符号が変わる.

$$\varepsilon(p(i, j)) = \varepsilon(\cdots p_j \cdots p_i \cdots) = (-1)\varepsilon(p) \quad (= \varepsilon(p)\varepsilon((i, j)))$$

特に, 互換の符号は (-1) .

証明 置換 p に (1), (2), (3) の互換や巡回置換を右から掛けたものを p' とする.

(1): $p_i < p_{i+1}$ のとき, (p_{i+1}, p_i) が転倒し p' の転倒数は 1 増える. $(t(p) + 1)$.

$p_i > p_{i+1}$ のとき, (p_i, p_{i+1}) の転倒が解消されて p' の転倒数は 1 減る. $(t(p) - 1)$.

$t_i = (i, i+1)$ の転倒数は 1 符号は (-1) だったので, いずれの場合も

$$\varepsilon(p') = (-1)^{t(p')} = (-1)^{t(p) \pm 1} = (-1)(-1)^{t(p)} = (-1)\varepsilon(p) = \varepsilon(p)\varepsilon(t_i)$$

(2): 前半: $t_i t_{i+1} \cdots t_{j-1} = 1_n(i, i+1) \cdots (j-1, j)$ は $1_n = (1 \cdots n)$ の i 番目と $(i+1)$ 番目, $(i+1)$ 番目と $(i+2)$ 番目, $\cdots$ $(j-1)$ 番目と j 番目をこの順に入れ換えたものなので $(\cdots i+1 \cdots j i \cdots) = t$ になる.

t^{-1} については $t_i^{-1} = (i+1, i) = t_i$ より, 逆順に掛ければ

$$t^{-1} = (t_i \cdots t_{j-1})^{-1} = t_{j-1}^{-1} \cdots t_i^{-1} = t_{j-1} \cdots t_i$$

後半: (1) を繰り返して用いることにより,

$$\varepsilon(pt) = \varepsilon((pt_i \cdots t_{j-2})t_{j-1}) = (-1)\varepsilon(pt_i \cdots t_{j-2}) = \cdots = (-1)^{j-i}\varepsilon(p)$$

特に $p = 1_n$ のとき $1_n t = t$, $\varepsilon(1_n) = 1$ より $\varepsilon(t) = (-1)^{j-i}$. 即ち, 巡回置換 $t = (i, i+1, \dots, j)$ の符号は $(-1)^{j-i}$. $\varepsilon(pt^{-1})$, $\varepsilon(t^{-1})$ も同様.

(3): 互換 (i, j) は巡回置換 $t = (i, \dots, j)$ と $t' = (i, \dots, j-1)^{-1}$ の積 tt' として表される. 実際, t の i 番目から $(j-1)$ 番目までを逆順に回すと t の $(j-1)$ 番目が i 番目にきて i 番目から $(j-2)$ 番目までが 1 つ後に移るので

$$tt' = \left(\begin{smallmatrix} \cdots & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & \cdots \\ \cdots & i+1 & i+2 & \cdots & j & i & \cdots \end{smallmatrix} \right) t' = \left(\begin{smallmatrix} \cdots & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & \cdots \\ \cdots & j & i+1 & \cdots & j-1 & i & \cdots \end{smallmatrix} \right) = (i, j)$$

後半は (2) より

$$\begin{aligned} \varepsilon(p') &= \varepsilon((pt)t') = \varepsilon(pt)(-1)^{j-i-1} = (-1)^{j-i-1}(-1)^{j-i}\varepsilon(p) \\ &= (-1)^{2(j-i)-1}\varepsilon(p) = (-1)\varepsilon(p) \end{aligned}$$

特に $p = 1_n$ とすれば, 互換の符号 $\varepsilon((i, j)) = (-1)$ を得る.

注意 1 この補題は, 互換や巡回置換 t について $\varepsilon(pt) = \varepsilon(p)\varepsilon(t)$ が成り立つことを述べている. 実は一般に, 置換は互換の積で表せ, 一般の置換 p, t についてもこの式が成り立つことが知られている.