

行列式 (determinant)

この章では行列はすべて (n 次) 正方行列とする.

2 次, 3 次の行列式 2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対し, $ad - bc$ を A の**行列式** (determinant) といい,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad |A|, \quad \det A, \quad |\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2| \quad \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}$$

などと, 記号 $\det$ や $\begin{vmatrix} \end{vmatrix}$ を用いて表す. $|A| = ad - bc \neq 0$ のとき A は正則で, 逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

であることが, 計算により確かめられる. $|A| = 0$ のときは A は正則でない.

$|A| \neq 0$ のとき, 連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は唯一の解 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ をもち, $\mathbf{x} = {}^t[x \ y]$, $\mathbf{b} = {}^t[e \ f]$ として $A^{-1}\mathbf{b}$ を計算すれば,

$$x = \frac{de - bf}{|A|} = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = \frac{\det [\mathbf{b} \ \mathbf{a}_2]}{|A|}, \quad y = \frac{-ce + af}{|A|} = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = \frac{\det [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{b}]}{|A|}$$

となり, 解も行列式を用いて表されることが分る. (Cramer (クラメル) の公式という.)

$|A| \neq 0$ のとき A が逆行列を持ち, A を係数行列とする連立一次方程式の解が行列式を用いて表されることが一般に成り立ち, 行列式を考える動機にもなっているが, このことは後で述べる.

3 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ の行列式 $\det A (= |A|)$ は, 比較の為, 1, 2 次正方行列の行列式と並べて書くと,

$$\begin{aligned} \det A &= \det [a_{11}] &&= a_{11}, \\ \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \\ \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &&= \begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \end{aligned} \tag{1}$$

と定義される. ここで, 項は行添字 (= 左添字) が 1, 2, 3 の順に並ぶ様に配列している. (強調表示している.)

このとき, 列添字 (= 右添字) は 1, 2, 3 の順列全てにわたっていることに注意する.

即ち, $n = 1, 2, 3$ のとき, 上の行列 A の行列式は

$$\det A = \sum_{(p_1, \dots, p_n)} \pm a_{1p_1} \cdots a_{np_n}$$

の形を持っている. ここで, 和は $1, \dots, n$ を全て並べる順列 (置換という) 全体にわたって取る $n!$ 項の和になっている. ($1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$.)

ここではこのことを一般化して, $\pm$ の符号を定めて行列式を定義することにする. 符号は置換により定まるので, まず置換の符号を定める.

置換の転倒数と符号 異なる n 個のものをすべて一列に並べる順列を n 次の**置換** (permutation) という. 異なる n 個のものは自然数 $1, 2, \dots, n$ に対応付けられるので, n 次の置換はここでは $1, 2, \dots, n$ の順列として,

$$\mathbf{p} = (p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n) \quad (1 \leq p_1, p_2, \dots, p_n \leq n)$$

と表す. (空白で区切る.) 1, 2, 3 次の置換を全て列挙すると

1 次: (1), 2 次: (12), (21), 3 次: (123), (132), (231), (213), (312), (321).

置換 $(12 \cdots n)$ を $\mathbf{1}_n$ で表し, **単位置換**, または **恒等置換** という. 置換はこの並び順を基本と考える.

n 次の置換 $\mathbf{p} = (p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n)$ において,

$$i < j \quad \text{なのに} \quad p_i > p_j \quad (\text{左にある数の方が右の数より大きい})$$

となる様な組 (p_i, p_j) (転倒対^{ついで}という) の個数を置換 $\mathbf{p}$ の**転倒数** といい, $t(\mathbf{p})$ や $t(p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n)$ と表す.

転倒数が偶数である置換を **偶置換**, 奇数である置換を **奇置換** という.

また, $(-1)^{t(\mathbf{p})}$ を **置換 $\mathbf{p}$ の符号 (signature)** といい $\text{sgn } \mathbf{p}, \varepsilon(\mathbf{p})$ や, $\varepsilon(p_1 p_2 \cdots p_n)$ と表す. 即ち

$$\text{sgn } \mathbf{p} = \varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(p_1 p_2 \cdots p_n) = (-1)^{t(\mathbf{p})} = \begin{cases} +1 & \mathbf{p} \text{ は偶置換} \\ -1 & \mathbf{p} \text{ は奇置換} \end{cases} \quad (2)$$

単位置換 $\mathbf{1}_n$ の転倒数は 0 なので, 符号は +1 であり, 偶置換である.

例 1 4 次の置換 $\mathbf{p} = (3241)$ において, 転倒対は $(3, 2), (3, 1), (2, 1), (4, 1), t(\mathbf{p}) = 4, \text{sgn } \mathbf{p} = (-1)^4 = +1$.

1, 2, 3 次の置換については転倒数, 符号が次の表のようになる.

置換	転倒数	符号	置換	転倒数	符号	置換	転倒数	符号
(1)	0	+1	(12)	0	+1	(21)	1	-1

置換	転倒対	転倒数	符号	置換	転倒対	転倒数	符号
(123)	なし	0	+1	(132)	(3, 2)	1	-1
(231)	(2, 1), (3, 1)	2	+1	(213)	(2, 1)	1	-1
(312)	(3, 1), (3, 2)	2	+1	(321)	(3, 2), (3, 1), (2, 1)	3	-1

行列式の定義 n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ の行列式 (**n 次の行列式**ともいう) $\det A = |A|$ を

$$\det A = |A| = \sum_{\mathbf{p}=(p_1 \cdots p_n)} (\text{sgn } \mathbf{p}) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (n \text{ 次の置換 } \mathbf{p} = (p_1 \cdots p_n) \text{ 全てにわたる } n! \text{ 項の和})$$

と定義する. 各項は各行, 各列から 1 つずつ成分を取り出して掛け, 符号を付けたものである. ($4! = 24, 5! = 120, 10! = 362880, 15! \approx 1.3 \times 10^{12}, 20! \approx 2.4 \times 10^{18}$. この様に, 次数が増えると項数が急速に増大する.)

$n = 1, 2, 3$ のとき, この定義は上の置換の符号表と (1) を見比べることにより一致していることが分かる.

行列式はまた次の様に成分で表したり, 行や列に分割して表したりする.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{vmatrix}, |\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n|, \det [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$$

注意 1 行列式の定義より, 複素行列, 実行列, 有理行列, 整数行列の行列式の値は, それぞれ複素数, 実数, 有理数, 整数になる. A の複素共役行列 $\bar{A}$ の行列式は A の行列式 $\det A$ の複素共役に等しい. 即ち, $\det \bar{A} = \overline{\det A}$. ($|\bar{A}| = \overline{|A|}$.)

例 2
$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ e & 0 & 0 & f \\ 0 & g & h & 0 \end{vmatrix} = -acfh + adfg + bceh - bdeg$$

解答 左辺 $= \varepsilon(1243)acfh + \varepsilon(1342)adfg + \varepsilon(4213)bceh + \varepsilon(4312)bdeg$ (他の項は 0) $=$ 右辺

例 3 対角行列の行列式は対角成分の積になる:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}, \quad \text{特に } |E| = 1, \quad |O| = 0$$

解答 置換 $\mathbf{p} = (p_1 \cdots p_n)$ が $\mathbf{p} \neq \mathbf{1}_n$ のとき, $i \neq p_i$ となる i がある. このとき $a_{ip_i} = 0$ なので $\varepsilon(\mathbf{p})a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n} = 0$. よって $\mathbf{p} = \mathbf{1}_n$ の項のみ残り, $\varepsilon(\mathbf{1}_n) = 1$ より右辺になる.

例 4 n 次の行列式について, 次の等式が成り立つ.

$$(1) \quad |cA| = c^n |A|. \quad (2) \quad \begin{vmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = \begin{cases} 1 & (n = 4m, \quad 4m+1) \\ -1 & (n = 4m+2, 4m+3) \end{cases}$$

解答 (1): $|cA| = \sum \varepsilon(\mathbf{p})(ca_{1p_1}) \cdots (ca_{np_n}) = c^n \sum \varepsilon(\mathbf{p})a_{1p_1} \cdots a_{np_n} = c^n |A|$.

(2): 左辺 $= \varepsilon(n \ n-1 \ \cdots \ 1) 1^n$. (これ以外の項は全て 0.) $\mathbf{p} = (n \ n-1 \ \cdots \ 1)$ の転倒数 $t(\mathbf{p})$ を数えると, n より右にある数は全て n より小さいのでその個数は $(n-1)$ 個, $n-1$ より右にあるのは $(n-2)$ 個, $\cdots$ より, $t(\mathbf{p}) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$. $\therefore$ 左辺 $= \varepsilon(\mathbf{p}) = (-1)^{t(\mathbf{p})} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} =$ 右辺.