連立一次方程式の消去法による解法と行列の操作との対比

消去法： 次の 3 つの操作により未知数を消去し, より簡単な方程式に変形して解を求める方法:

I.　1 つの方程式に 0 でない数を掛ける.

II.　1 つの方程式に, 他の方程式を何倍かしたものを加える.

III.　2 つの方程式を入れ替える.

上記 3 つの操作は拡大係数行列の **行基本変形** と呼ばれる次の 3 つの操作に対応する：

第 i 行 (row i) を r_i と表すとき

[R1]　ある行（第 i 行 r_i) に 0 でない数 s を掛ける.（記号 sr_i ）

[R2]　ある行 (第 i 行 r_i) に他の行（第 j 行 r_j) の定数倍（ s 倍）を加える.（記号 $r_i + sr_j$ ）

[R3]　2 つの行（第 i 行 r_i と第 j 行 r_j) を入れ替える.（記号 $r_i \leftrightarrow r_j$ ）

例

連立一次方程式

$$\begin{cases} x-2y+3z = 1\cdots\text{①} \\ 3x+y-5z=-4\cdots\text{②} \\ -2x+6y-9z=-2\cdots\text{③} \end{cases}$$

拡大係数行列　基本行列との積

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & -4 \\ -2 & 6 & -9 & -2 \end{bmatrix} = [A\ \boldsymbol{b}] = A_0$$

① 式を用いて ②, ③ 式より x を消去

$$\begin{cases} & x-2y+3z = 1\cdots\text{①} \\ \text{②}-3\times\text{①} & 7y-14z=-7\cdots\text{②} \\ \text{③}+2\times\text{①} & 2y-3z=0\cdots\text{③} \end{cases}$$

第 1 列で $(1,1)$ 成分以外の成分を 0 にする

$$\begin{array}{r} \\ r_2-3r_1 \\ r_3+2r_1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -14 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = P_{31}(2)P_{21}(-3)A_0 = A_1$$

② 式の y の係数を 1 にする

$$\begin{cases} & x-2y+3z = 1\cdots\text{①} \\ \frac{1}{7}\times\text{②} & y-2z=-1\cdots\text{②} \\ & 2y-3z=0\cdots\text{③} \end{cases}$$

第 2 行の 0 でない最初の成分 ($(2,2)$ 成分) を 1 にする

$$\begin{array}{r} \\ \frac{1}{7}r_2 \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = P_2(\tfrac{1}{7})A_1 = A_2$$

② 式を用いて ①, ③ 式より y を消去

$$\begin{cases} \text{①}+2\times\text{②} & x-z=-1\cdots\text{①} \\ & y-2z=-1\cdots\text{②} \\ \text{③}-2\times\text{②} & z=2\cdots\text{③} \end{cases}$$

第 2 列で $(2,2)$ 成分以外の成分を 0 にする

$$\begin{array}{r} r_1+2r_2 \\ \\ r_3-2r_2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = P_{32}(-2)P_{12}(2)A_2 = A_3$$

③ 式を用いて ①, ② 式より z を消去

$$\begin{cases} \text{①}+\text{③} & x=1 \\ \text{②}+2\times\text{③} & y=3 \\ & z=2 \end{cases}$$

第 3 列で $(3,3)$ 成分以外の成分を 0 にする

$$\begin{array}{r} r_1+r_3 \\ r_2+2r_3 \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = P_{23}(2)P_{13}(1)A_3 = A_4 = [E\ \boldsymbol{d}]$$

となって, 次の解を得た.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{d}$$

ここで $P = P_{23}(2)P_{13}(1)P_{32}(-2)P_{12}(2)P_2(\frac{1}{7})P_{32}(2)P_{23}(-3)$ と置くと $P(A\ \boldsymbol{b}) = PA_0 = A_4 = [E\ \boldsymbol{d}]$. つまり $PA = E$, $P\boldsymbol{b} = \boldsymbol{d}$. $\therefore\ A = P^{-1}$, $P = A^{-1}$,　$P\boldsymbol{b} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{d}$ となっている.

右側の行列の変形において, A_0 から A_1 への「第 1 列で $(1,1)$ 成分以外の成分を 0 にする」変形を「$(1,1)$ 成分を軸にして第 1 列を**掃き出す**」という. 同様に, A_2 から A_3 への一連の変形「第 2 列で $(2,2)$ 成分以外の成分を 0 にする変形」を「$(2,2)$ 成分を軸にして第 2 列を**掃き出す**」という.

連立一次方程式の掃き出し法による解法例

c を定数, 連立一次方程式と拡大係数行列を

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y - 4z = c \end{cases} \qquad [A, \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & c \end{bmatrix}$$

とし， $[A, \boldsymbol{b}]$ を掃き出し法により簡単化する．
まず， $(1,1)$ 成分を軸として第 1 列を掃き出す: （以下，掃き出しの軸となる成分を ◯ で囲む.）

	x	y	z	右辺
	1	-2	5	0
$[A\ \boldsymbol{b}] =$	2	-1	1	3
	1	1	-4	c

$\mapsto$

基本変形	x	y	z	右辺
	1	-2	5	0
$r_2 - 2r_1$	0	3	-9	3
$r_3 - r_1$	0	3	-9	c

第 2 行を 3 で割り， $(2,2)$ 成分を軸として第 2 列を掃き出す:

$\mapsto$

基本変形	x	y	z	右辺
	1	-2	5	0
$\frac{1}{3}r_2$	0	1	-3	1
	0	3	-9	c

$\mapsto$

基本変形	x	y	z	右辺
$r_1 + 2r_2$	1	0	-1	2
	0	1	-3	1
$r_3 - 3r_2$	0	0	0	$c-3$

係数行列 A はこれ以上簡単にできない．これを元の方程式に戻すと

$$\begin{cases} x \quad - \ z = 2 \\ \quad y - 3z = 1 \\ \qquad 0 = c - 3 \end{cases}$$

$c \neq 3$ のとき，第 3 行の $0 = c - 3$ に矛盾．従って，$c \neq 3$ のときは**解なし**.
$c = 3$ のとき， x, y の係数を 1 にしたので 第 1, 第 2 行の z の項を右辺に移項し， z は任意の値 t を取れるので $z = t$ とおくと解

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3t + 1 \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を得る．尚, ベクトルで表した解は拡大係数行列の最終形から読み取ることが出来るが，詳しくは後で述べる．