

第2章 連立一次方程式

連立一次方程式と行列 一般に, n 個の未知数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ に関する m 個の方程式からなる次の**連立一次方程式**において, 係数, 未知数, および右辺の定数の作る行列をそれぞれ A, x, b とおく:

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

このとき Ax は方程式の左辺を表し, 方程式 (*) は 次の様に表示できる: $Ax = b$

この $m \times n$ 行列 A を連立一次方程式 (*) の **係数行列**, x を**未知数ベクトル**, 右辺の b を**定数項ベクトル**といい, A に b を付け加えた $m \times (n+1)$ 行列

$$[A, b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

を方程式 (*) の **拡大係数行列**という. 尚, 単独の方程式も連立方程式の一種と考える.

補足資料の例の様に, 連立一次方程式は拡大係数行列の**行基本変形**(次の3つの操作)により解ける:

第 i 行 (row i) を r_i と表すとき

[R1] ある行 (第 i 行 r_i) に 0 でない数 s を掛ける. (記号 sr_i)

[R2] ある行 (第 i 行 r_i) に他の行 (第 j 行 r_j) の定数倍 (s 倍) を加える. (記号 $r_i + sr_j$)

[R3] 2つの行 (第 i 行 r_i と第 j 行 r_j) を入れ替える. (記号 $r_i \leftrightarrow r_j$)

一般に, 行列 $A=[a_{ij}]$ の (p, q) 成分 a_{pq} が 0 でないとき, 第 q 列の (p, q) 成分以外の成分を行基本変形 $r_i - \frac{a_{iq}}{a_{pq}}r_p$, ($i \neq p$) により 0 にする一連の変形を「**(p, q) 成分を軸にして第 q 列を掃き出す**」という:

$$\begin{bmatrix} a_{1q} \\ \vdots \\ * & a_{pq} & * \\ \vdots \\ a_{mq} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} r_1 - \frac{a_{1q}}{a_{pq}}r_p \\ \vdots \\ \vdots \\ r_m - \frac{a_{mq}}{a_{pq}}r_p \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ * & a_{pq} & * \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

方程式を解くときは, まず第 p 行を a_{pq} で割り ($\frac{1}{a_{pq}}r_p$, (p, q) 成分が 1 になる), 続いて (p, q) 成分を軸にして第 q 列を掃き出す (第 q 列の, (p, q) 成分以外の成分を 0 にする) 事により, 第 q 列を基本ベクトル e_p にすることが多い.

なお, 先に (p, q) 成分を軸にして第 q 列を掃き出してから, 後で第 p 行を a_{pq} で割ってもよい. この一連の変形を「**(p, q) 成分を 1 にして第 q 列を掃き出す**」ということにする.

拡大係数行列を掃き出しにより簡単化して連立一次方程式を解くこの方法は **掃き出し法** といわれる.

注 掃き出しは行列の成分の四則演算によって構成されているので, A が実行列ならば掃き出した結果の行列 A_1 も実行列になる. A が有理行列ならば A_1 も有理行列になる. 但し A が整数行列でも, A_1 の成分は整数とは限らず, 一般には有理行列になる.

行基本変形と基本行列 行基本変形は以下に述べる基本行列と呼ばれる正則行列を左から掛けることに対応する:

単位行列 E_n に行基本変形 [R1],[R2],[R3] を施した行列 $P_i^{(n)}(s)$, $P_{ij}^{(n)}(s)$, $P_{ij}^{(n)}$ (略して $P_i(s)$, $P_{ij}(s)$, P_{ij}) を**基本行列**という.

基本行列

$$P_i(s) = P_i^{(n)}(s) = E_n \text{ の第 } i \text{ 行を } s \text{ 倍した行列 } (s \neq 0)$$

$$P_{ij}(s) = P_{ij}^{(n)}(s) = E_n \text{ の第 } i \text{ 行に第 } j \text{ 行の } s \text{ 倍を加えた行列 } (i \neq j)$$

$$P_{ij} = P_{ij}^{(n)} = E_n \text{ の第 } i \text{ 行と第 } j \text{ 行を入れ替えた行列 } (i \neq j)$$

例 [2 次と 3 次の基本行列]

$$P_2^{(2)}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}, \quad P_{12}^{(2)}(s) = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{12}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2^{(3)}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{31}^{(3)}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{12}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一般には, 「 $\cdot$ 」などは E_n と同じ部分とし, E_n と異なる部分を示すと:

$$P_i(s) = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & s & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \leftarrow i = \begin{bmatrix} \vdots \\ s\mathbf{e}^i \\ \vdots \end{bmatrix} = [\cdots s\mathbf{e}^i \cdots], \quad P_{ij}(s) = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ & & s \end{bmatrix} \leftarrow i = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{e}^i + s\mathbf{e}^j \\ \vdots \end{bmatrix} = [\cdots \mathbf{e}^j + s\mathbf{e}^i \cdots],$$

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 0 & 1 \\ & & \ddots \\ 1 & & 0 & \ddots \end{bmatrix} \leftarrow i = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{e}^j \\ \vdots \\ \mathbf{e}^i \\ \vdots \end{bmatrix} = [\cdots \mathbf{e}^j \cdots \mathbf{e}^i \cdots]$$

基本行列を行列 A に左から掛けると行基本変形を施した行列になる. 即ち

基本行列と行列の積

$$\begin{aligned} P_i(s)A &= A \text{ の第 } i \text{ 行を } s \text{ 倍した行列 } (sr_i) \\ P_{ij}(s)A &= A \text{ の第 } i \text{ 行に第 } j \text{ 行の } s \text{ 倍を加えた行列 } (r_i + sr_j) \\ P_{ij}A &= A \text{ の第 } i \text{ 行と第 } j \text{ 行を入れ替えた行列 } (r_i \leftrightarrow r_j) \end{aligned}$$

証明 基本行列を行ベクトルに分割し, $\mathbf{e}^i A = \mathbf{a}^i$ を用いれば次の様に分かる.

$$P_i(s)A = \begin{bmatrix} \vdots \\ s\mathbf{e}^i A \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ s\mathbf{a}^i \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad P_{ij}(s)A = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{e}^i A + s\mathbf{e}^j A \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}^i + s\mathbf{a}^j \\ \vdots \end{bmatrix} \quad P_{ij}A = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{e}^j A \\ \vdots \\ \mathbf{e}^i A \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}^j \\ \vdots \\ \mathbf{a}^i \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \text{ここで } A = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}^i \\ \vdots \\ \mathbf{a}^j \\ \vdots \end{bmatrix}$$

注 $P_i(s)$ は対角行列, P_{ij} は実対称行列, $P_{ij}(s)$ は, $i > j$ のとき下三角行列 (上の行を s 倍して下の行に加える事に対応する), $i < j$ のとき上三角行列である.

基本変形 sr_i , $r_i + sr_j$, $r_i \leftrightarrow r_j$ の逆変形はそれぞれ $s^{-1}r_i$, $r_i - sr_j$, $r_i \leftrightarrow r_j$ であり, 基本行列の逆行列はこれらに対応した基本行列となる. 即ち,

定理 2.1 (基本行列の逆行列)

基本行列は正則で, その逆行列は同じ型の基本行列である. 即ち

$$P_i(s)^{-1} = P_i\left(\frac{1}{s}\right) = P_i(s^{-1}), \quad P_{ij}(s)^{-1} = P_{ij}(-s), \quad P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

列基本変形 行基本変形の「行」を「列」に置き換えて, 行列の**列基本変形** が次の様に定義される:

第 j 列 (column j) を c_j と表すとき, $i \neq j$ として,

- [C1] ある列 c_i に 0 でない数 s を掛ける (記号 sc_i)
- [C2] ある列 c_j に他の列 c_i の定数倍 (s 倍) を加える (記号 $c_j + sc_i$)
- [C3] 2 つの列 c_i と c_j を入れ替える (記号 $c_i \leftrightarrow c_j$)

行列に列基本変形を施すことは基本行列を右から掛けることに対応する. 即ち,

列基本変形

$$\begin{aligned} AP_i(s): & \quad A \text{ の第 } i \text{ 列を } s \text{ 倍した行列} \\ AP_{ij}(s): & \quad A \text{ の第 } j \text{ 列に第 } i \text{ 列の } s \text{ 倍を加えた行列} \\ AP_{ij}: & \quad A \text{ の第 } j \text{ 列と第 } i \text{ 列を入れ替えた行列} \end{aligned}$$

証明 $A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$ に, 列分割した基本行列を右から掛け, $A\mathbf{e}^j = \mathbf{a}^j$ を用いれば:

$$\begin{aligned} AP_i(s) &= [\cdots A(s\mathbf{e}^i) \cdots] = [\cdots s\mathbf{a}^i \cdots], \quad AP_{ij}(s) = [\cdots A(\mathbf{e}^j + s\mathbf{e}^i) \cdots] = [\cdots \mathbf{a}^j + s\mathbf{a}^i \cdots], \\ AP_{ij} &= [\cdots A\mathbf{e}^j \cdots A\mathbf{e}^i \cdots] = [\cdots \mathbf{a}^j \cdots \mathbf{a}^i \cdots] \end{aligned}$$