

和の記号 Σ について

まず,

$$\sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

である様に, 和を表す添え字はどんな文字を用いても同じ式を表す. 従って, 和の添え字は一つの式中で他に使われていない文字であればどんな文字を用いてもよい.

積と和については,

$$(1) \quad \sum_{j=1}^m a_j \sum_{k=1}^n b_k = \left(\sum_{j=1}^m a_j \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) = (a_1 + \cdots + a_m)(b_1 + \cdots + b_n)$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^m \left(a_j \sum_{k=1}^n b_k \right) = a_1(b_1 + \cdots + b_n) + \cdots + a_m(b_1 + \cdots + b_n)$$

$$(3) \quad \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_j b_k \right) = (a_1 b_1 + \cdots + a_1 b_n) + \cdots + (a_m b_1 + \cdots + a_m b_n)$$

$$(4) \quad \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_j b_k = a_1 b_1 + \cdots + a_1 b_n + \cdots + a_m b_1 + \cdots + a_m b_n$$

であり, 右辺は (1) から順に展開して (4) になるので,

$$\sum_{j=1}^m a_j \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{j=1}^m \left(a_j \sum_{k=1}^n b_k \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_j b_k \right) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_j b_k$$

項の順序を入れ換えれば同様に,

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_j b_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_j b_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_j b_k \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_j \right) b_k$$

従ってこれらは全て等しいので**区別する必要はない**. これらはまた次の様に $\sum$ の形で表される:
和をとる範囲

$$\sum_{1 \leq j \leq m} \sum_{1 \leq k \leq n} a_j b_k, \quad \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}} a_j b_k, \quad \sum_{1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n} a_j b_k, \quad m=n \text{ のときは } \sum_{1 \leq j, k \leq n} a_j b_k$$

和を取る範囲が他に明示されているときは, 範囲を略して $\sum_{j, k} a_j b_k$ や $\sum a_j b_k$ の様にも表される.

なお, 積 $a_1 a_2 \cdots a_n$ に関しても積の記号 $\prod$ を用いて

$$\prod_{i=1}^n a_i, \quad \prod_{1 \leq i \leq n} a_i$$

などと表される.