行列の演算法則

[数の基本的性質]: まず, 数の演算法則から述べる. 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$, 実数全体の集合を $\mathbb{R}$, 有理数, 整数, 自然数全体の集合をそれぞれ $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ と表す. 数の和, 積には次の基本的性質がある: a, b, c を数とするとき

数の基本的性質

1. (結合法則) $(a+b)+c = a+(b+c)$, $(ab)c = a(bc)$
2. (交換法則) $a+b = b+a$, $ab = ba$
3. (分配法則) $(a+b)c = ac+bc$, $a(b+c) = ab+ac$
4. (単位元) $a+0 = a = 0+a$, $a{\cdot}1 = a = 1{\cdot}a$
5. (和の逆元) a に対し, $a+b = 0 = b+a$ となる b がある. $(b=-a)$

5'. (積の逆元, 逆数) $a \neq 0$ のとき $a{\cdot}c = 1 = c{\cdot}a$ となる c がある. $(c = \dfrac{1}{a} = 1/a = a^{-1})$

結合法則により和, 積では括弧を省略できる. 交換法則が成り立つので和, 積の順序は自由に交換できる.

実数同士の和, 積はまた実数になる. このことを「実数は (又は $\mathbb{R}$ は) 和, 積に関して **閉じている**」という. 一般に, ある集合に演算が定められていて, その部分集合の元 (=要素) 同士の演算結果が又その部分集合に属すとき, その部分集合はその演算に関し閉じているという. 他の数の集合 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ も和, 積に関して閉じている. $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ は四則演算に関して閉じており, これらの集合に四則演算を合わせて考えるとき, それぞれ**複素数体, 実数体, 有理数体**という. $\mathbb{Z}$ は和, 差, 積に関して閉じており, **整数環**という. ($\mathbb{Z}$ は商, $\mathbb{N}$ は差, 商に関して閉じていない.) 数の四則演算に関する性質はこれらの基本的性質から導ける. 例えば $0{\cdot}a = 0$ は, $0{\cdot}a = (0+0){\cdot}a = 0{\cdot}a + 0{\cdot}a$. $-0{\cdot}a$ を両辺に加えると, 右辺は $0{\cdot}a + 0{\cdot}a + (-0{\cdot}a) = 0{\cdot}a + 0 = 0{\cdot}a$ より $0 = 0{\cdot}a$ をえる.

行列の和, スカラー倍, 積は, それらが定義されるときは各成分が数の和と積により定められているので, 積の順序交換を除き数と同様の性質を持つことを以下に述べる. 従って, 行列の計算は数や式の計算とほとんど同じに扱える. (差は和と (-1) 倍で表せるので, 差については以下特には言及しない.)

以下では行列同士の**和, 積が全て定義**されているものとする.

定義式 $[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$, $s[a_{ij}] = [sa_{ij}]$, $[a_{ij}][b_{ij}] = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}]$ より:

行列の和, スカラー倍の性質

1. (結合法則) $(A+B)+C = A+(B+C)$, $(st)A = s(tA)$ 2. (交換法則) $A+B = B+A$, $sA = As$
3. (分配法則) $(s+t)A = sA+tA$, $s(A+B) = sA+sB$ 4. (単位性) $1A = A$

行列の積の性質

1. (結合法則) $(AB)C = A(BC)$, $s(AB) = (sA)B = A(sB)$
2. (分配法則) $A(B+C) = AB+AC$, $(B+C)D = BD+CD$

証明 結合法則 $(AB)C = A(BC)$ を示す. $A = [a_{ij}]$ を (k, ℓ) 型, $B = [b_{ij}]$ を (ℓ, m) 型, $C = [c_{ij}]$ を (m, n) 型の行列とするとき

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{q=1}^{m} (AB)_{iq} c_{qj} = \sum_{q=1}^{m} \left(\sum_{p=1}^{\ell} a_{ip} b_{pq} \right) c_{qj} = \sum_{q=1}^{m} \sum_{p=1}^{\ell} a_{ip} b_{pq} c_{qj} = \sum_{p=1}^{\ell} a_{ip} \left(\sum_{q=1}^{m} b_{pq} c_{qj} \right) = \sum_{p=1}^{\ell} a_{ip} (BC)_{pj} = (A(BC))_{ij}$$

これ以外の式も同様に計算することにより, この証明よりは容易に示せる.

注 実数が四則演算で閉じていることより, 実行列同士の和, 差, 積, 実数倍は, それらが定義されれば実行列になる. 同様に, 有理行列同士の演算結果および有理数倍は有理行列になり, 整数行列同士の演算結果および整数倍は整数行列になる.

結合法則が成り立つので行列の演算は括弧は省略して次の様に表す:

$$A+B+C, \quad A_1 + \cdots + A_n, \quad ABC, \quad A_1 A_2 \cdots A_n, \quad sAB, \quad \text{など}$$

零行列 成分が全て 0 の $m \times n$ 行列を**零行列**といい $O_{m,n}$, (略して O) で表す. 特に, 全ての成分が 0 である行ベクトルおよび列ベクトルを**零ベクトル** といい $\mathbf{0}$ で表す.

$$O = O_{m,n} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{または} \quad [0\,0\,\cdots\,0]$$

零行列 O は数における 0 と同じ次の性質を持つ: $m \times n$ 行列 A に対し

零行列の性質

$$A + O_{m,n} = A, \quad A - A = O_{m,n} = -A + A, \quad 0A = O_{m,n}, \quad sO_{m,n} = O_{m,n}, \quad AO_{n,\ell} = O_{m,\ell}, \quad O_{\ell,m}A = O_{\ell,n}$$

単位行列　対角成分 が全て 1 で, 他の成分が全て 0 の n 次正方行列を **単位行列** といい, E_n, 略して E と表す. (文献によっては I_n, I とも書かれる.):

$$E = E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{e}_2\,\cdots\,\boldsymbol{e}_n] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}^1 \\ \boldsymbol{e}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}^n \end{bmatrix} \quad \left(\text{略して} \begin{bmatrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & 1 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \right)$$

ここで, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を **基本列ベクトル**, $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \ldots, \boldsymbol{e}^n$ を **基本行ベクトル** といい, 総称して **基本ベクトル** という:

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j, \cdots, \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}^1 = [1\,0 \cdots 0], \ \cdots, \ \boldsymbol{e}^i = [0 \ \cdots \overset{i}{1} \cdots \ 0], \ \cdots, \ \boldsymbol{e}^n = [0 \cdots 0\,1]$$

クロネッカーのデルタ記号　$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ で定められる記号 δ_{ij} を **クロネッカー (Kronecker) のデルタ** という. これは単位行列の (i, j) 成分である. 即ち　$E = [\,\delta_{ij}\,]$.

単位行列は数の 1 と同様の役割を果たし, $m \times n$ 行列 A に対し

単位行列の性質

$$E_m A = A, \qquad A E_n = A$$

証明　クロネッカーのデルタの使い方を練習する為, この式を δ_{ij} を用いて証明する.

$$(E_m A)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} a_{kj} \underset{k \neq i \text{ の項は } 0 \text{ より}}{=} \delta_{ii} a_{ij} = a_{ij}, \quad (A E_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \delta_{kj} \underset{k \neq j \text{ の項は } 0 \text{ より}}{=} a_{ij} \delta_{jj} = a_{ij}$$

この式をを列ベクトル分割して考えれば

$[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n] = A = AE = A[\boldsymbol{e}_1 \cdots \boldsymbol{e}_n] = [A\boldsymbol{e}_1 \cdots A\boldsymbol{e}_n]$　より　$\boldsymbol{a}_j = A\boldsymbol{e}_j$. 同様に $A = EA$ より $\boldsymbol{a}^i = \boldsymbol{e}^i A$. これらを合わせて　$a_{ij} = \boldsymbol{e}^i A \boldsymbol{e}_j$. まとめると

基本ベクトルと行列の行, 列, 成分

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a}_j = A\boldsymbol{e}_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (A\boldsymbol{e}_j \text{ は } A \text{ の第 } j \text{ 列を表す. }) \\ &\boldsymbol{a}^i = \boldsymbol{e}^i A \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad (\boldsymbol{e}^i A \text{ は } A \text{ の第 } i \text{ 行を表す. }) \\ &a_{ij} = \boldsymbol{e}^i A \boldsymbol{e}_j \quad (\boldsymbol{e}^i A \boldsymbol{e}_j \text{ は } A \text{ の } (i, j) \text{ 成分を表す. }) \end{aligned} \tag{1}$$

数との違い　(1)　A, B がともに n 次正方行列のときは積 AB, BA はともに定義され n 次正方行列になる. しかし, 一般には $AB = BA$ が成り立つは限らない.　$AB = BA$　が成り立つとき A と B は**可換**, あるいは **交換可能** であるという.

(2) $A \neq O$, $B \neq O$ であっても $AB = O$ となる行列が存在する. この様な行列 A, B を **零因子**[1] という.

(3) $A \neq O$ であっても, $AX = B$, $YA = B$ となる行列 X, Y が存在するとは限らないので「割り算」が定義できない.

例　$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,　$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$　とするとき, $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$,　　$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O$

なので, $AB \neq BA$ であり, A, B は零因子である. また, $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$　とすると,

$$AX = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & w \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E \right), \quad XA = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & z \end{bmatrix} \left(\neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E \right)$$

なので, $AX = E$ をみたす行列 X も, $XA = E$ をみたす X も存在しない.

[1]「因子」は, 因数や約数と同様の意味を持つ.