積と転置の行列式

行列 A は, 基本行列の積である正則行列 P' により階段行列 $B=P'A$ に変形できた (行簡約化定理) . $P=P'^{-1}$ とおくと, $A=P'^{-1}B=PB$ であり, P は基本行列の積 $P_1P_2\cdots P_k$ で表せた. このことを利用して, 積や転置行列の行列式を調べることができる.

補題 3.7 (基本行列と行列式)
(1) 基本行列について $|P_i(s)|=s\neq 0,\quad |P_{ij}(s)|=1,\quad |P_{ij}|=-1.$
(2) P が基本行列, B が任意の行列のとき, $|PB|=|P||B|.$
(3) P が正則行列, B が任意の行列のとき, $|PB|=|P||B|.$

証明 (1) $|E|=1$ であり, 基本行列は E に行基本変形を施して得られるので定理 3.5 (R1),(R2),(R3) より (1) を得る.
(2) これも定理 3.5 による: $P{=}P_i(s)$ のとき, 左辺は (R1) より $s|B|$. 右辺は (1) より $s|B|$. $\therefore$ 左辺 = 右辺. 他も同様.
(3) 正則行列 P は $P=P_1P_2\cdots P_k$ と基本行列の積で表せるので (2) を繰り返し用いて

$$|PB|=|P_1P_2\cdots P_kB|=|P_1||P_2\cdots P_kB|=\cdots=|P_1||P_2|\cdots|P_k||B| \tag{1}$$

特に $B=E$ のとき $|E|=1$ より $|P|=|PE|=|P_1||P_2|\cdots|P_k|$. (1) に代入して

$$|PB|=|P_1||P_2|\cdots|P_k||B|=|P||B|$$

定理 3.8 (積の行列式) 任意の n 次正方行列 A, B に対し, $|AB|=|A||B|$

証明 A が正則のときは, 上の補題 3.7 (3) で $P=A$ とすればよい. A が正則でないとき, A は, A の階段行列 C と正則行列 P を用いて $A=PC$ と表せ, C の最下行は $\mathbf{0}$ なので, $C=\begin{bmatrix}C'\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$ と表せる. $\mathbf{0}$ を含む行列式の値は 0 なので (定理 3.4), $|A|=|PC|=|P||C|$ (補題 3.7 (3)) より,

$|A|=|P||C|=|P|\begin{vmatrix}C'\\ \mathbf{0}\end{vmatrix}=0,\ |CB|=\left|\begin{bmatrix}C'\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}B\right|=\begin{vmatrix}C'B\\ \mathbf{0}B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C'B\\ \mathbf{0}\end{vmatrix}=0.\ \therefore |A||B|{=}0|B|{=}0,\ |AB|{=}|PCB|{=}|P||CB|=|P|0{=}0$

よって $|AB|=0=|A||B|$ となり, いずれの場合も定理が成り立つ.

定理 3.9 (正則性と行列式) 正方行列 A が正則である必要十分条件は $|A|\neq 0.$
また, このとき, $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}=|A|^{-1}.$

証明 上の定理 3.8 により, A が正則ならば $|A||A^{-1}|=|AA^{-1}|=|E|=1$ より $|A|\neq 0,\quad |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=|A|^{-1}$
A が正則でないならば $|A|=0$, となることは上の定理 3.8 の証明中で示した. この対偶は, $|A|\neq 0$ ならば A は正則, なので上と合わせて定理が成り立つ. □

定理 3.9 と定理 2.8(正則性の判定法) の対偶, および定理 2.5(同次連立一次方程式の解) を合わせると次を得る.

系 3.10 (非正則性の同値条件) n 次正方行列 A に対し次は同値である :
(1) $|A|=0$ (2) A は正則でない (3) rank $A<n$ (4) 同次方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ は自明でない解をもつ

次に転置行列の行列式と元の行列の行列式の値が同じであることを示す.

補題 3.11 基本行列 P に対し, $|{}^tP|=|P|$

証明 ${}^tP_i(s)=P_i(s)$, ${}^tP_{ij}=P_{ij}$ と, ${}^tP_{ij}(s)=P_{ji}(s)$ より $|{}^tP_{ij}(s)|=|P_{ji}(s)|=1=|P_{ij}(s)|$ (補題 3.7 (1)) による.

定理 3.12 (転置不変性) 正方行列 A に対し $|{}^tA|=|A|$

証明 A が正則ならば $A=P_1P_2\cdots P_k$ と基本行列の積で表されるので

$|{}^tA|=|{}^t(P_1P_2\cdots P_k)|=|{}^tP_k\cdots{}^tP_2\,{}^tP_1|=|{}^tP_k|\cdots|{}^tP_2||{}^tP_1|=|P_k|\cdots|P_2||P_1|=|P_1||P_2|\cdots|P_k|=|P_1P_2\cdots P_k|=|A|.$

A が正則でないときは ${}^tA$ も正則でないので $|{}^tA|=0=|A|$. □

この定理により, 行に関する性質は列に関しても成立することが分かる. 実際, ${}^tA$ に行に関する性質を適用し, 再び転置をとって元に戻せばよい.

定理 3.13 (列に関する基本的性質)

(I) 多重線形性 A のある列 $\boldsymbol{a}_j$ が,

(1) $\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}''$ のとき,

$$\det[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_j \cdots \boldsymbol{a}_n] = \det[\boldsymbol{a}_1 \cdots (\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}'') \cdots \boldsymbol{a}_n] = \det[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}' \cdots \boldsymbol{a}_n] + \det[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}'' \cdots \boldsymbol{a}_n]$$

(2) $\boldsymbol{a}_j = s\boldsymbol{a}'$ のとき,

$$\det[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_j \cdots \boldsymbol{a}_n] = \det[\boldsymbol{a}_1 \cdots s\boldsymbol{a}' \cdots \boldsymbol{a}_n] = s \cdot \det[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}' \cdots \boldsymbol{a}_n]$$

(II) 交代性 A の 2 つの列 $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j$ $(i \neq j)$ を入れ換えると行列式の値は (-1) 倍になる:

$$\det[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_i \cdots \boldsymbol{a}_j \cdots \boldsymbol{a}_n] = -\det[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_j \cdots \boldsymbol{a}_i \cdots \boldsymbol{a}_n]$$

証明 例えば, (I)(2) については, $A = [\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_j \cdots \boldsymbol{a}_n]$, $\boldsymbol{a}_j = s\boldsymbol{a}'$ のとき

$$\text{左辺} = |A| \underset{3.12}{=} |{}^tA| = \begin{vmatrix} \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_j \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ s{}^t\boldsymbol{a}' \\ \vdots \end{vmatrix} \underset{\mathrm{R1}}{=} s \begin{vmatrix} \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}' \\ \vdots \end{vmatrix} \underset{3.12}{=} s \cdot \det[\cdots \boldsymbol{a}' \cdots] = \text{右辺}$$

を得る. 他や以下も同様.

系 3.14 A の第 j 列を第 1 列に移し, 第 $1 \sim (j-1)$ 列を第 $2 \sim j$ 列に移した (1 つずつ右にずらした) 行列を A' とするとき $|A| = (-1)^{j-1}|A'|$. 即ち,

$$\det[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_{j-1}\, \boldsymbol{a}_j \cdots \boldsymbol{a}_n] = (-1)^{j-1} \det[\boldsymbol{a}_j\, \boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_{j-1}\, \boldsymbol{a}_{j+1} \cdots \boldsymbol{a}_n]$$

定理 3.15 次の行列 A の行列式の値は 0 になる:

(1) ある列の成分が全て 0. ($\boldsymbol{a}_j = \mathbf{0}$.)

(2) ある 2 つの列が等しい. ($\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j$, $i \neq j$.)

(3) ある列が他の列の定数倍に等しい. ($\boldsymbol{a}_i = s\boldsymbol{a}_j$, $i \neq j$.)

定理 3.16 (列基本変形と行列式)

(C1) ある列を s 倍すると行列式の値も s 倍になる.

(C2) ある列に他の列の s 倍を加えても行列式の値は変わらない.

(C3) 2 つの列を入れ替えると行列式の値は (-1) 倍になる.

定理 3.17 (次数低下法 II) $\begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{0} \\ * & A' \end{vmatrix} = a_{11}|A'|$, $\quad \begin{vmatrix} A'' & \mathbf{0} \\ * & a_{nn} \end{vmatrix} = |A''|a_{nn}$

例 1 (下三角行列の行列式) $\begin{vmatrix} a_{11} & & O \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdots a_{nn}$, $\quad \begin{vmatrix} E & O \\ C & A' \end{vmatrix} = |A'|$, $\quad \begin{vmatrix} A'' & O \\ C & E \end{vmatrix} = |A''|$

次数低下法 I,II を一般化すると,

定理 3.18 (次数低下法 (一般形))

正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対し,

$$\begin{vmatrix} A_1 & \mathbf{0} & A_2 \\ * & a_{ij} & * \\ A_3 & \mathbf{0} & A_4 \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & * & A_2 \\ \mathbf{0} & a_{ij} & \mathbf{0} \\ A_3 & * & A_4 \end{vmatrix}.$$

証明 左辺 = 中辺 を示す. 左辺の第 i 行を第 1 行に移し, 第 1 行から第 $(i-1)$ 行を一つ下にずらす巡回置換を行うと, その符号は $(-1)^{i-1}$ 倍になる. 同様に列に対して第 j 列を第 1 列に移す巡回置換を行うと $(-1)^{j-1}$ 倍になる. このとき $(-1)^{i+j-2} = (-1)^{i+j}$ と次数低下法 I より中辺に等しいことが分かる. 即ち

$$\begin{vmatrix} A_1 & \mathbf{0} & A_2 \\ * & a_{ij} & * \\ A_3 & \mathbf{0} & A_4 \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} * & a_{ij} & * \\ A_1 & \mathbf{0} & A_2 \\ A_3 & \mathbf{0} & A_4 \end{vmatrix} = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \begin{vmatrix} a_{ij} & * & * \\ \mathbf{0} & A_1 & A_2 \\ \mathbf{0} & A_3 & A_4 \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

右辺 = 中辺 も同様. ($*$ と $\mathbf{0}$ が入れ替わるので, 次数低下法 II を使えば良い.)