# 行列の標準形の計算例

**例 1 (行列の標準型)** $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ の標準型を求めよ.

**解答** 左側に基本変形を，中央に行列を，右側に基本行列との積を書いた表を作ると

| 基本変形 | 行　列 | 基本行列との積 | 基本変形 | 行　列 | 基本行列との積 |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{matrix}$ | $=A$ | $r_2-2r_1$ $r_3+2r_1$ | $\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{matrix}$ | $P_{31}(2)P_{21}(-2)A$ $=A_1$ |
| $r_2 \leftrightarrow r_3$ | $\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ | $P_{23}A_1=A_2$ | $\frac{1}{4}r_2$ | $\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ | $P_2(\frac{1}{4})A_2=A_3$ |
| $c_2-c_1$ $c_3-2c_1$ $c_4-3c_1$ | $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ | $A_3P_{12}(-1)\times$ $P_{13}(-2)P_{14}(-3)$ $=A_4$ | $c_4-2c_3$ | $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ | $A_4P_{34}(-2)$ $=A_5$ |
| $c_2 \leftrightarrow c_3$ | $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ | $A_5P_{23}$ $=A_6=F_{34}(2)$ | | | |

$$PAQ=F_{34}(2)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P=P_2(\tfrac{1}{4})P_{23}P_{31}(2)P_{21}(-2), \quad Q=P_{12}(-1)P_{13}(-2)P_{14}(-3)P_{34}(-2)P_{23}$$

従って $A$ の標準型は $F_{34}(2)$ となる. 尚, $A_2$ は行階段型の行列であり, 階数と標準型はこの段階で分る.

$P,Q$ も求めるときは $\begin{bmatrix} A & E_m \\ E_n & O \end{bmatrix}$ に上と同じ基本変形を施せば $E_m$ が $P$ に, $E_n$ が $Q$ になることから求められる.

**例 2 (行列の標準型 2)** $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & x \end{bmatrix}$ の標準型を求めよ.

**解答** $A$ を行階段型の行列に変形する. 左側に基本変形を，右側に行列を書いた表を作ると

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A=$ | $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & x \end{matrix}$ | $r_2-r_1$ $r_3-r_1$ | $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & x-3 \end{matrix}$ | $r_1-\frac{1}{2}r_2$ $r_3-2r_2$ | $\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x-7 \end{matrix}$ | $r_1 \leftrightarrow r_2$ | $\begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & x-7 \end{matrix}$ |

最後の行列は行階段型の行列であり, 階数は $x=7$ のとき $\mathrm{rank}\,A=2$,　$x\neq 7$ のとき $\mathrm{rank}\,A=3$ と分る. 従って, $A$ の標準型は $x=7$ のとき $F_{33}(2)$,　$x\neq 7$ のとき $F_{33}(3)$ $(=E_3)$.

参考: 標準形まで変形するには $(1,1)$ 成分を 1 にして第 1 行を掃き出し, 続いて $(2,2)$ 成分を軸にして第 2 行を掃き出し, $x\neq 7$ のときは $(3,3)$ 成分を 1 にすればよい.　$c=x-7$ とおくと

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}c_1$ | $\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & c \end{matrix}$ | $c_2-2c_1$ $c_3-2c_1$ | $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & c \end{matrix}$ | $c_3-2c_2$ | $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{matrix}$ |

$c=x-7\neq 0$ のとき

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{c}c_3$ | $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ |

# 補足: 座標平面，座標空間上の一次方程式

ここでは 係数, 定数, 解は全て実数の範囲で考え，解 $\boldsymbol{x}$ $(= {}^t[x,y], {}^t[x,y,z])$ は座標平面や座標空間の点 (の座標) を表すものとする．
座標平面上の一次方程式

$$ax + by = c$$

は**直線の方程式**といわれる．拡大係数行列は $[a\ b\ c]$ で，$[a\ b] \neq \mathbf{0}$ のとき一般解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} + t\boldsymbol{x}_1$ をもつ．( $a \neq 0$ のときは $b' = b/a,\ c' = c/a$ とすると，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c' \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -b' \\ 1 \end{bmatrix} \quad \left( = \boldsymbol{d} + t\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} c' \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -b' \\ 1 \end{bmatrix} \right)$)
この式は $\boldsymbol{d}$ を通り，$\boldsymbol{x}_1$ に平行な直線を表しており, 直線の**ベクトル方程式**, または**パラメーター表示**といわれる．
即ち，平面上の一次方程式の解は直線のベクトル方程式を与える．
また, $a = b = c = 0$ のときは全平面を表し, $a = b = 0,\ c \neq 0$ のときはこの方程式をみたす点 $\boldsymbol{x}$ はなく, 空集合になる．
連立一次方程式

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \cdots (1) \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \cdots (2) \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} a_1\ b_1 \\ a_2\ b_2 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

について,
rank $A = 2$, 即ちこれが唯一の解を持つとき, 解は (1),(2) の表す 2 つの直線の交点 (の座標) を表す.
rank $A =$ rank $[A, \boldsymbol{b}] = 1$ のとき, 一般には (1),(2) の一方は他方の定数倍であり同じ直線を表す.
rank $A = 1 <$ rank $[A, \boldsymbol{b}] = 2$ のとき, (1),(2) の左辺の一方は他方の定数倍 ($k$ 倍) だが, 右辺の一方は他方の $k$ 倍ではなく, 一般には (1),(2) は平行な直線を表す.

座標空間上の一次方程式

$$ax + by + cz = d$$

の拡大係数行列は $[a\ b\ c\ d]$ で，$[a\ b\ c] \neq \mathbf{0}$ のとき一般解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} + s\boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{x}_2$ をもつ．$a \neq 0$ のときは

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -b' \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -c' \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \left( = \boldsymbol{d} + s\boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{x}_2,\quad b' = \frac{b}{a},\ c' = \frac{c}{a},\ d' = \frac{d}{a} \right) \tag{1}$$

解 $\boldsymbol{x}$ は 点 $\boldsymbol{d}$ を通り，原点 O と点 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ の張る平面に平行な平面 $P$ 上にある．逆に平面 $P$ 上の点は実数の組 $(s,t)$ により $\boldsymbol{d} + s\boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{x}_2$ と一意的に表され, $s,t$ が全ての実数値をとって変るとき, 点 $\boldsymbol{x}$ の全体は平面 $P$ になる．この故に (1) 式は**平面のベクトル方程式**, または**パラメーター表示**といわれる．元の一次方程式も平面 $P$ を表し, **平面の方程式** といわれる．なお, $a = b = c = 0$ で, $d = 0$ のときは全空間を，$d \neq 0$ のときは空集合を表す.
連立方程式

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \cdots (1) \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \cdots (2) \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} a_1\ b_1\ c_1 \\ a_2\ b_2\ c_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

について,
rank $A = 2$, 即ち自由度 1 の解を持つとき，解は (1),(2) の表す 2 平面の交線を表す.
rank $A =$ rank $[A, \boldsymbol{b}] = 1$ のとき, 一方は他方の定数倍であり, 一般には同じ平面を表す.
rank $A = 1 <$ rank $[A, \boldsymbol{b}] = 2$ のとき, 他方の定数倍 ($k$ 倍) だが, 一般には平行な平面を表す.
方程式数が 3 の場合, 係数行列 $A$ の階数が, rank $A = 3$ のときは唯 1 つの解をもち，解は 3 つの平面の交点を表す.
rank $A < 3$ で解がないときは 3 平面のつくる 3 交線が共有点をもたない場合があり, 解をもつときは 3 交線が一致する等, いろいろな場合がある.