

行列の標準形と階数

行の掃き出し 行基本変形を繰り返して列の掃き出しを行った様に、列基本変形を繰り返して次の様に行を掃き出す事が出来る： 行列 $A = [a_{ij}]$ において $a_{pq} \neq 0$ のとき、列基本変形 $c_j - (a_{pj}/a_{pq})c_q$ (第 q 列を a_{pj}/a_{pq} 倍して第 j 列から引く) を $j \neq q$ なる各 j について行えば第 p 行の (p, q) 成分以外の成分が 0 になる：

$$\begin{bmatrix} & * & & \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} & \cdots & a_{pn} \\ & * & & \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} c_1 - \frac{a_{p1}}{a_{pq}}c_q \\ \vdots \\ c_n - \frac{a_{pn}}{a_{pq}}c_q \end{matrix}} \begin{bmatrix} & * & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{pq} & 0 & \cdots & 0 \\ & * & & \end{bmatrix}$$

この一連の変形を「**(p, q) 成分を軸にして第 p 行を掃き出す**」という。

行列の標準形 連立一次方程式の係数行列の変形の様に、 $m \times n$ 行列 A を階段行列に変形し、列の順序を並べ替える (=列交換を繰り返す) と A は次の形に変形できた： $\begin{bmatrix} E_r & C \\ O & O \end{bmatrix}$ ($r = \text{rank } A$)

この行列の $(1, 1) - (r, r)$ 成分を軸にして第 $1 \sim r$ 行を掃き出せば次の形になる：

$$\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r & O_{r, n-r} \\ O_{m-r, r} & O_{m-r, n-r} \end{bmatrix}$$

この形の行列を行列 A の**標準形** (詳しくは階数標準形) といい $F_{mn}(r)$ と表す。 A の標準形は行と列の基本変形により得られたので、行と列の変形に対応する基本行列の積である正則行列 P, Q を左右から掛けることにより得られる。即ち次を得た。

定理 2.11 (行列の標準形) $m \times n$ 行列 A は行と列の基本変形を繰り返すことにより、標準形 $F_{mn}(r)$ に変形できる。特に、正則行列 P, Q が存在して

$$PAQ = F_{mn}(r) = \begin{bmatrix} E_r & O_{r, n-r} \\ O_{m-r, r} & O_{m-r, n-r} \end{bmatrix}, \quad r = \text{rank } A$$

と表せ、次が成り立つ：

$$\text{rank } A = A \text{ の標準形に現れる } 1 \text{ の個数}$$

注意 1 次の場合もある： $F_{mn}(m) = [E_m, O]$, $F_{mn}(n) = \begin{bmatrix} E_n \\ O \end{bmatrix}$, $F_{nn}(n) = E_n$, $F_{mn}(0) = O$ 。

定理 2.12 (標準形と階数の一意性) $m \times n$ 行列 A の標準形は基本変形の仕方によらず一意的に定まる。特に A の階数 $\text{rank } A$ は基本変形の仕方によらず A のみにより一意的に定まる数である。

証明 上の定理 2.11 により A の標準形が

$$P_1 A Q_1 = F_{mn}(r) = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}, \quad P_2 A Q_2 = F_{mn}(s) = \begin{bmatrix} E_s & O \\ O & O \end{bmatrix}, \quad r \leq s$$

と 2 通りあるとして、 $r = s$ を示す。このとき $P = P_2 P_1^{-1}$, $Q = Q_1^{-1} Q_2$ とおけば

$$P F_{mn}(r) Q = P_2 P_1^{-1} F_{mn}(r) Q_1^{-1} Q_2 = P_2 P_1^{-1} P_1 A Q_1 Q_1^{-1} Q_2 = P_2 A Q_2 = F_{mn}(s)$$

となる。ここで $P, Q, F_{mn}(s)$ を $(1, 1)$ ブロックが r 次正方行列になる様に対称に分割する。 $r \leq s$ に注意すれば

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}, \quad F_{mn}(s) = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & E' \end{bmatrix}$$

となる。 $P F_{mn}(r) Q = F_{mn}(s)$ の左辺は

$$P F_{mn}(r) Q = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} Q_{11} & P_{11} Q_{12} \\ P_{21} Q_{11} & P_{21} Q_{12} \end{bmatrix}$$

となり、右辺と比較して

$$P_{11} Q_{11} = E_r, \quad P_{21} Q_{11} = O, \quad P_{11} Q_{12} = O, \quad P_{21} Q_{12} = E'$$

を得る。 $P_{11} Q_{11} = E_r$ より P_{11}, Q_{11} は正則となり、これより $P_{21} = O$, $Q_{12} = O$ を得る。このとき $E' = P_{21} Q_{12} = O$ となり、 $r = s$ を得る。以上より A の標準型が一意的に定まり、前定理 2.11 より「 $\text{rank } A = A$ の標準型に現れる 1 の個数」なので階数も一意的に定まる。

定理 2.13 (階数の基本性質)

- (1) $\text{rank } A \leq A$ の行数, 列数. (2) S, T が正則ならば, $\text{rank } SAT = \text{rank } SA = \text{rank } AT = \text{rank } A$.
- (3) $\text{rank } {}^t A = \text{rank } A$. (4) $\text{rank } AB \leq \text{rank } A, \quad \text{rank } AB \leq \text{rank } B$.

証明 A の標準形を $PAQ = F_{mn}(r)$ (P, Q は正則行列) とする. $r = \text{rank } A =$ 「 A の標準型に現れる 1 の個数」である.

(1) は $r \leq m, r \leq n$ より明らか.

(2) は $PS^{-1}(SAT)T^{-1}Q = F_{mn}(r), PS^{-1}(SA)Q = F_{mn}(r),$

$P(AT)T^{-1}Q = F_{mn}(r)$ より SAT, SA, AT が A と同じ標準形を持つことによる.

(3) は両辺の転置を取れば ${}^tQ {}^tA {}^tP = F_{nm}(r)$ が tA の標準形となるので,

$$\text{rank } {}^tA = r = \text{rank } A.$$

(4): (2) より $\text{rank } AB = \text{rank } PAB$. $PAB = (PAQ)(Q^{-1}B) = F_{mn}(r)(Q^{-1}B)$. $Q^{-1}B$ を r 行目までの B_1 とそれより下の B_2 に分割すれば,

$$PAB = F_{mn}(r)(Q^{-1}B) = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ O \end{bmatrix}, \quad \text{rank} \begin{bmatrix} B_1 \\ O \end{bmatrix} \leq r$$

よって, $\text{rank } AB = \text{rank } PAB \leq r = \text{rank } A$.

後半は, このことと ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ および (3) より,

$$\text{rank } AB = \text{rank } {}^t(AB) = \text{rank } {}^tB {}^tA \leq \text{rank } {}^tB = \text{rank } B$$

行列の標準形の計算例

例 1 (行列の標準型) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ の標準型を求めよ.

解答 左側に基本変形を, 中央に行列を, 右側に基本行列との積を書いた表を作ると

基本変形	行 列	基本行列との積	基本変形	行 列	基本行列との積
	① $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	$= A$	$r_2 - 2r_1$ $r_3 + 2r_1$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$	$P_{31}(2)P_{21}(-2)A = A_1$
$r_2 \leftrightarrow r_3$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$P_{23}A_1 = A_2$	$\frac{1}{4}r_2$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$P_2(\frac{1}{4})A_2 = A_3$
$c_2 - c_1$ $c_3 - 2c_1$ $c_4 - 3c_1$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$A_3P_{12}(-1) \times$ $P_{13}(-2)P_{14}(-3)$ $= A_4$	$c_4 - 2c_3$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$A_4P_{34}(-2) = A_5$
$c_2 \leftrightarrow c_3$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	A_5P_{23} $= A_6 = F_{34}(2)$	$PAQ = F_{34}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$		

$$P = P_2(\frac{1}{4})P_{23}P_{31}(2)P_{21}(-2), \quad Q = P_{12}(-1)P_{13}(-2)P_{14}(-3)P_{34}(-2)P_{23}$$

従って A の標準型は $F_{34}(2)$ となる. 尚, A_2 は行階段型の行列であり, 階数と標準型はこの段階で分る.

P, Q も求めるときは $\begin{bmatrix} A & E_m \\ E_n & O \end{bmatrix}$ に上と同じ基本変形を施せば E_m が P に, E_n が Q になることから求められる.

例 2 (行列の標準型 2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & x \end{bmatrix}$ の標準型を求めよ.

解答 A を行階段型の行列に変形する. 左側に基本変形を, 右側に行列を書いた表を作ると

$A =$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & x \end{bmatrix}$	$r_2 - r_1$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & x-3 \end{bmatrix}$	$r_1 - \frac{1}{2}r_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x-7 \end{bmatrix}$	$r_1 \leftrightarrow r_2$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & x-7 \end{bmatrix}$
-------	---	-------------	---	------------------------	---	---------------------------	---

最後の行列は行階段型の行列であり, 階数は $x=7$ のとき $\text{rank } A=2$, $x \neq 7$ のとき $\text{rank } A=3$ と分る. 従って, A の標準型は $x=7$ のとき $F_{33}(2)$, $x \neq 7$ のとき $F_{33}(3) (=E_3)$.

参考: 標準形まで変形するには $(1,1)$ 成分を 1 にして第 1 行を掃き出し, 続いて $(2,2)$ 成分を軸にして第 2 行を掃き出し, $x \neq 7$ のときは $(3,3)$ 成分を 1 にすればよい. $c = x-7$ とおくと

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}c_1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 - 2c_1 \\ c_3 - 2c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad c = x-7 \neq 0 \text{ のとき} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{c}c_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c = 0 \text{ のとき} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$