

逆行列

ここでは掃き出し法を利用して逆行列の計算法を与える。まず、階段行列とその階数による正則性の判定法を示す。

定理 2.8 (正則性の判定法) n 次正方行列 A について次は同値である：

- (1) A は正則
- (2) $\text{rank } A = n$
- (3) A の階段行列 B は単位行列 E_n

証明 A の階段行列を $B = PA$ (P は基本行列の積である正則行列) とする。

(1) $\Rightarrow$ (2): A が正則ならば積 $B=PA$ も正則。よって B の行ベクトルに $\mathbf{0}$ は含まれない。よって $\text{rank } A = \text{rank } B = n$ 。

(2) $\Rightarrow$ (3): $\text{rank } B = n$ だから階段行列と階数の定義により B は n 個の基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ を列ベクトルにもつ。 B は n 次なので $B = [\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n] = E_n$ 。

(3) $\Rightarrow$ (1): $PA = B = E$ より、左から P^{-1} を掛けて

$$A = P^{-1}PA = P^{-1}E = P^{-1}.$$

よって A は正則で、逆行列は P 。

P は基本行列の積 $P = P_1 \cdots P_k$ だから、 $A = P^{-1}$ は基本行列 P_i の逆行列 P_i^{-1} (これも基本行列) を逆順に掛けたもの $P^{-1} = P_k^{-1} \cdots P_1^{-1}$ になっている。よって次を得た：

定理 2.9 正則行列は基本行列の積で表せる。

定理 2.10 正方行列 A, X について、 $AX=E$, $XA=E$ のいずれか一方が成り立てば A, X は正則で、 $X=A^{-1}$, $A=X^{-1}$ であり、他方も成り立つ。

証明 $AX=E$ の場合: A を正則行列 P により階段行列 $B=PA$ に変形すると $PAX=PE$ より $BX=P$ 。 P は正則なので行に ${}^t\mathbf{0}$ を含まない。よって B も行に ${}^t\mathbf{0}$ を含まないので $B=E$ 。定理 2.8 より A は正則で、 $A^{-1}=P=EX=X$ となる。このとき $XA=A^{-1}A=E$ 。 $XA=E$ の場合は X を階段行列に変形すれば同様に成り立つ。

逆行列の計算法 一般に、 $m \times n$ 行列 A と $m \times \ell$ 行列 C (同じ行数) について、 $m \times (n+\ell)$ 行列 $[A, C]$ を行変形し、 A を階段行列 $B=PA$ (P は正則行列) に変形するとき

$$P[A, C] = [PA, PC] = [B, PC]$$

特に $C = E_m$ とすれば

$$P[A, E_m] = [B, PE_m] = [B, P]$$

より P を得る。定理 2.8 により A が正則行列のときは $B=E$, $P=A^{-1}$ 。

よって A が正方行列で、 $[A, E]$ を行変形することにより $[B, P]$ を得るとき、

正則性の判定法と逆行列

$B = E$ ならば、 A は正則で、 $P = A^{-1}$ 。

$B \neq E$ ならば、 A は正則でない。

♠ 逆行列の計算例参照

注意 1 $AX = C = [\mathbf{c}_1 \cdots \mathbf{c}_\ell]$ となる $n \times \ell$ 行列 $X = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_\ell]$ を求める事は、 ℓ 組の連立一次方程式 $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{c}_1, \dots, A\mathbf{x}_\ell = \mathbf{c}_\ell$ を同時に解く事に相当する。このとき $AX=C$ が解 X をもつ為の必要十分条件は $\text{rank } [A, C] = \text{rank } A$ 。

実際、 $\text{rank } A = r$, $P[A, C] = [B, PC] = [B, P\mathbf{c}_1 \cdots P\mathbf{c}_\ell]$ とするとき、 $\text{rank } [A, C] = r$ ならば PC の $(r+1)$ 行目以下は O であり、($[B, PC]$ は階段行列で) 全ての i について $\text{rank } [A, \mathbf{c}_i] = r$ となるので $A\mathbf{x}_i = \mathbf{c}_i$ は解をもち、従って $AX=C$ は解をもつ。 $\text{rank } [A, C] > r$ ならば PC の $(r+1)$ 行目以下は O でないので、ある $P\mathbf{c}_i$ の $(r+1)$ 行目以下は $\mathbf{0}$ でない。このとき $\text{rank } [A, \mathbf{c}_i] = \text{rank } [B, P\mathbf{c}_i] > r$ であり、 $A\mathbf{x}_i = \mathbf{c}_i$ は解をもたず、従って $AX=C$ は解をもたない。

逆行列の計算例

例 1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ が正則であるか調べ、正則ならば逆行列を求めよ。

解答

基本変形	A	E	基本行列との積
	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[A, E] = A_1$
$r_2 - 3r_1$ $r_3 - 5r_1$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & -7 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$P_{31}(-5)P_{21}(-3)A_1 = A_2$
$r_2 - r_3$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$P_{23}(-1)A_2 = A_3$
$r_1 - 3r_2$ $r_3 + 7r_2$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$P_{32}(7)P_{12}(-3)A_3 = A_4$
$r_1 + r_3$ $r_2 - r_3$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$P_{23}(-1)P_{13}(1)A_4 = A_5$

A の階段行列 B が単位行列 E になったので A は正則で、 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -7 & -6 & 5 \\ 9 & 7 & -6 \end{bmatrix}$

注意 2 A^{-1} および A は基本行列の積として次の様に表せる。 $A^{-1} = P_{23}(-1)P_{13}(1)P_{32}(7)P_{12}(-3)P_{23}(-1)P_{31}(-5)P_{21}(-3)$.
 $A = (A^{-1})^{-1} = P_{21}(3)P_{31}(5)P_{23}(1)P_{12}(3)P_{32}(-7)P_{13}(-1)P_{23}(1)$. (但し、この表し方は一意的ではない.)

同様に、 A が正則のときは $[A, C]$ を行変形すれば $[B, PC] = [E, A^{-1}C]$ となり、 $A^{-1}C$ が求まる。

例 2 $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ とし、例 1 の A に対し $A^{-1}C$ を求めよ。

解答 $[A, C]$ に対し、例 1 の解答と同じ行変形を行えば $A^{-1}C$ を得る：

$$[A, C] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 8 & 4 & 7 & 8 & 9 \end{array} \right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 5 & 15 \end{array} \right] = [E, PC] = [E, A^{-1}C]$$

問 1 この計算を実行せよ。また、 A^{-1} と C の掛算を行って一致することを確認せよ。

例 3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ が正則であるかどうかを調べ、正則ならば逆行列を求めよ。

解答

$$[A, E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

この段階で、 A の階段行列は E_3 にはならず、 A は正則でないことが分る。参考の為、行変形を続けると：

$$\xrightarrow{r_2 - 3r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-1/3r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -5/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

より $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq E_3$. $P = \begin{bmatrix} -5/3 & 2/3 & 0 \\ 4/3 & -1/3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $PA = \begin{bmatrix} -5/3 & 2/3 & 0 \\ 4/3 & -1/3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$ であり、

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ となっている。