連立一次方程式の解法例

例 1 (係数行列が階段行列である方程式)

(1) c を定数とし, 拡大係数行列が

$$[B,\boldsymbol{d}]=\left[\begin{array}{cc:cc:c}1&0&2&-1&5\\0&1&-3&2&-4\\\hdashline 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&c\end{array}\right]=\begin{bmatrix}B'&\boldsymbol{d}'\\O&\boldsymbol{d}''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_2&C&\boldsymbol{d}'\\O&O&\boldsymbol{d}''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1&\boldsymbol{e}_2&\boldsymbol{c}_1&\boldsymbol{c}_2&\boldsymbol{d}'\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{d}''\end{bmatrix}$$

であるとする. このとき $[B,\boldsymbol{d}]$ の第 4 行は方程式 $0=c$ を表している.

(i) $c\neq 0$ のときは $0=c$ に矛盾するので **解なし**. このとき $\boldsymbol{d}''\neq\boldsymbol{0}$ であり,

$\operatorname{rank}[B,\boldsymbol{d}]=3>\operatorname{rank}B=2.$

(ii) $c=0$, $\therefore$ $\boldsymbol{d}''=\boldsymbol{0}$ のとき, $\operatorname{rank}[B,\boldsymbol{d}]=2=\operatorname{rank}B$ で, 第 $3,4$ 行は $0=0$ を表し, 第 $1,2$ 行は方程式

$$\begin{cases}x_1\phantom{{}+x_2}+2x_3-x_4=5\\\phantom{x_1+{}}x_2-3x_3+2x_4=-4\end{cases}$$

を表す. x_1,x_2 の係数を 1 にしたのでこれらの項を残し, 他の項を右辺に移項する. x_3,x_4 は任意の値を取れるので, t_1,t_2 を任意定数とし $x_3=t_1,\ x_4=t_2$ とおけば次の解を得る：

$$\begin{cases}x_1=5-2t_1+t_2\\x_2=-4+3t_1-2t_2\\x_3=t_1\\x_4=t_2\end{cases},\qquad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-4\\0\\0\end{bmatrix}+t_1\begin{bmatrix}-2\\3\\1\\0\end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{d}'=\begin{bmatrix}5\\-4\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{c}_1=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{c}_2=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ だったので, 解は $\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ (2 次元の基本ベクトル) として,

$$\boldsymbol{x}=\widetilde{\boldsymbol{d}}+t_1\boldsymbol{x}_1+t_2\boldsymbol{x}_2.\quad \widetilde{\boldsymbol{d}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}'\\\boldsymbol{0}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{c}_1\\\boldsymbol{e}_1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{c}_2\\\boldsymbol{e}_2\end{bmatrix}$$

と表せる. 即ち解は $[B,\boldsymbol{d}]$ から直接書き表せることに注意しておく.

(2) 拡大係数行列と方程式が

$$[B,\boldsymbol{d}]=\left[\begin{array}{c:c:c:c:c}1&2&0&-1&5\\\hdashline 0&0&1&2&-4\end{array}\right]=\begin{bmatrix}B'&\boldsymbol{d}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1&\boldsymbol{c}_1&\boldsymbol{e}_2&\boldsymbol{c}_2&\boldsymbol{d}'\end{bmatrix},\qquad \begin{cases}x_1+2x_2\phantom{{}+x_3}-x_4=5\\\phantom{x_1+2x_2+{}}x_3+2x_4=-4\end{cases}$$

であるとする. ($B'=B,\ \boldsymbol{d}'=\boldsymbol{d}$.) このとき, $[B',\boldsymbol{d}']$ の第 2 列と第 3 列を交換すると (1) の $[E_2\,C\,\boldsymbol{d}']$ の形に帰着できるが, これは方程式の x_2 の項と x_3 の項の順序を入れ替えることに相当する:

$$[E_2,C,\boldsymbol{d}']=\left[\begin{array}{cc:cc:c}1&0&2&-1&5\\0&1&0&2&-4\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1&\boldsymbol{e}_2&\boldsymbol{c}_1&\boldsymbol{c}_2&\boldsymbol{d}'\end{bmatrix},\qquad \begin{cases}x_1\phantom{{}+x_3}+2x_2-x_4=5\\\phantom{x_1+{}}x_3\phantom{{}+2x_2}+2x_4=-4\end{cases}$$

(1) の解法に従って解を書き下すと (x_2,x_4 の項を右辺に移項し, $x_2=t_1,\ x_4=t_2$ とおくと)

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}x_1\\x_3\\x_2\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}'\\\boldsymbol{0}\end{bmatrix}+t_1\begin{bmatrix}-\boldsymbol{c}_2\\\boldsymbol{e}_2\end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix}-\boldsymbol{c}_1\\\boldsymbol{e}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-4\\0\\0\end{bmatrix}+t_1\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}\qquad\left(\begin{cases}x_1=5-2t_1+t_2\\x_3=-4\phantom{{}-2t_1}-2t_2\\x_2=t_1\\x_4=t_2\end{cases}\right)$$

第 2 行と第 3 行を入れ替える (x_2 と x_3 を入れ替える) と次の解を得る.

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\0\\-4\\0\end{bmatrix}+t_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$$

例 2 連立一次方程式 $\begin{cases} x + \ \ y + \ \ z + \ \ w = 1 \\ 5x + 6y + 3z + 7w = 1 \\ 2x + \ \ y + 4z \qquad\ \ = 6 \end{cases}$ を解け.

解答　ここでは上記の解法の具体例として詳しく解説する.
まず拡大係数行列 $[A, \boldsymbol{b}]$ を作り, 掃き出し法により係数行列 A の部分を階段行列 B に変形する.

基本変形	x	y	z	w	右辺
$[A, \boldsymbol{b}] =$	1	1	1	1	1
	5	6	3	7	1
	2	1	4	0	6

基本変形	x	y	z	w	右辺
	1	1	1	1	1
$r_2 - 5r_1$	0	1	-2	2	-4
$r_3 - 2r_1$	0	-1	2	-2	4

基本変形	x	y	z	w	右辺
$r_1 - r_2$	1	0	3	-1	5
	0	1	-2	2	-4
$r_3 + r_2$	0	0	0	0	0

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{d}' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [B, \boldsymbol{d}]$$

$$\therefore\ \operatorname{rank}[A, \boldsymbol{b}] = \operatorname{rank} A = 2 < 4 = \ (\text{未知数の個数})$$

よって この方程式は無数の解を持ち, 解の自由度は $4 - 2 = 2$ である. 表の階段行列に対応する方程式は $\begin{cases} x \quad + 3z - \ w = \ \ 5 \\ \quad y - 2z + 2w = -4 \end{cases}$ なので, (係数を 1 にした x, y は残し,) z, w の項を右辺に移項する. z, w は任意の値を取れるので, s, t を任意定数として $z = s,\ w = t$ とおけば, 解は

$$\begin{cases} x = \ \ 5 - 3s + \ t \\ y = -4 + 2s - 2t \\ z = \qquad\quad s \\ w = \qquad\qquad\quad t \end{cases} \qquad \therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と表されるが, この解は階段行列から次の様に読み取れる：階段行列の第 1, 2 行 ($\operatorname{rank} A$ 行まで) の軸列でない 2 つの列 (第 3 列と第 4 列) と定数項をそれぞれ $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{d}'$ とすると,

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d}' = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

である. このとき解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}' \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -\boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{e}_1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ (= \tilde{\boldsymbol{d}} + s\boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{x}_2 \text{ とおく})$$

尚, 定数 s, t は任意なので $-s, -t$ に置き換えても解になる. このとき解は,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}' \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ -\boldsymbol{e}_1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_2 \\ -\boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

[検算]　元の方程式に代入して検算する. 解の定数項 (特殊解) $\tilde{\boldsymbol{d}}$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解なのでこれに代入する：

$$\begin{cases} 1 \cdot 5 + 1 \cdot (-4) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1 \\ 5 \cdot 5 + 6 \cdot (-4) + 3 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 1 \\ 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-4) + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 6 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} 5 + \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} (-4)\ (+\boldsymbol{0}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

基本解 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{e}_1 \end{bmatrix} = {}^t[-3, 2, 1, 0]$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} = {}^t[1, -2, 0, 1]$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解なのでこれに代入して,

$$A\boldsymbol{x}_1: \begin{cases} 1(-3) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \\ 5(-3) + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 7 \cdot 0 = 0 \\ 2(-3) + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} (-3) + \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} 2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A\boldsymbol{x}_2: \begin{cases} 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0 \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + 7 \cdot 1 = 0 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 \quad 0 \cdot 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} (-2) + \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

より, 得られた解が正しいことが分かる. これらを $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_1 x + \cdots + \boldsymbol{a}_4 w$ の様に表すと,
$A\boldsymbol{x}_1 = (-3)\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ $\therefore$ $\boldsymbol{a}_3 = 3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2$. $A\boldsymbol{x}_2 = 1\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$ $\therefore$ $\boldsymbol{a}_4 = (-1)\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2$.
即ち, $\boldsymbol{a}_3$ は $\boldsymbol{c}_1$ を, $\boldsymbol{a}_4$ は $\boldsymbol{c}_2$ を用いれば $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の一次結合で表されることが分かる.

例 3 連立一次方程式 $\begin{cases} \quad\;\; 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -4 \\ x_1 + \;\; x_2 + 2x_3 + 3x_4 = \;\;\, 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = \;\;\, 1 \end{cases}$ を解け.

解答 拡大係数行列 $[A, \boldsymbol{b}]$ を作り, 掃き出し法により係数行列 A の部分を階段行列 B に変形する.

$$
\begin{array}{|c|cccc:c|}
\hline
\text{基本変形} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \text{右辺} \\
\hline
 & 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\
[A, \boldsymbol{b}] = & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\
 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{|c|cccc:c|}
\hline
 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\
r_1 \leftrightarrow r_2 & 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\
 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{|c|cccc:c|}
\hline
 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\
 & 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\
r_3 - r_1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
\hline
\end{array}
$$

軸として $(3, 2)$ 成分を選び, 第 2 行と第 3 行を入れ替える. (最終結果は同じになる.)

$$
\begin{array}{|c|cccc:c|}
\hline
 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\
r_2 \leftrightarrow r_3 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
 & 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{|c|cccc:c|}
\hline
r_1 - r_2 & 1 & 0 & 1 & 4 & 3 \\
 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
r_3 - 3r_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{|c|cccc:c|}
\hline
r_1 - 4r_3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 7 \\
r_2 + r_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
\hline
\end{array}
= \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{d} \end{bmatrix} = [B, \boldsymbol{d}]
$$

$$\operatorname{rank}[A, \boldsymbol{b}] = \operatorname{rank} A = 3 < 4 = \text{(未知数の個数)}$$

よって この方程式は無数の解を持ち, 解の自由度は $4 - 3 = 1$ である. 解を書き下すために, 第 3 列と第 4 列を入れ替えて左側を E_3 にする. これは未知数 x_3, x_4 の項の順序を入れ替えることに相当するので

$$
\begin{array}{|c|cccc:c|}
\hline
\text{基本変形} & x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & \text{右辺} \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 7 \\
c_3 \leftrightarrow c_4 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
\hline
\end{array}
= \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}
$$

t を任意定数, $\boldsymbol{c} = {}^t[1, 1, 0]$ (第 4 列), $\boldsymbol{d}' = \boldsymbol{d} = {}^t[7, -2, 1]$ (定数項) として解を階段行列から直接書き下すと

$$
\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -\boldsymbol{c} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}' \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (= t\boldsymbol{y}_1 + \tilde{\boldsymbol{d}})
$$

元の順に戻すと

$$
\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (= t\boldsymbol{x}_1 + \tilde{\boldsymbol{d}}') \qquad \left(\text{あるいは} \quad \boldsymbol{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)
$$

と, 一般解を得た. (基本解 $\boldsymbol{x}_1$ は B の軸列でない列 (第 3 列) $\boldsymbol{c}$ から作られ第 3 行が 1 になっている.)

[検算] 特殊解 (定数項) $\tilde{\boldsymbol{d}}' = {}^t[7, -2, 0, -1]$ は元の方程式に代入すれば

$$
\begin{cases} \quad\;\; 3(-2) + 3 \cdot 0 - 2(-1) = -4 \\ 7 + \;\; (-2) + 2 \cdot 0 + 3(-1) = \;\;\, 2 \\ 7 + 2(-2) + 3 \cdot 0 + 2(-1) = \;\;\, 1 \end{cases} \quad 7 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$(\therefore\ 7\boldsymbol{a}_1 + (-2)\boldsymbol{a}_2 + 0\boldsymbol{a}_3 + (-1)\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{b}.\ )$
基本解 $\boldsymbol{x}_1 = {}^t[-1, -1, 1, 0]$ は同次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に代入すれば

$$
\begin{cases} \quad\;\; 3(-1) + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 0 \\ (-1) + \;\; (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 0 \\ (-1) + 2(-1) + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0 \end{cases} \quad (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$(\ \therefore\ (-1)\boldsymbol{a}_1 + (-1)\boldsymbol{a}_2 + 1\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0} \quad \therefore\ \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2.\ )$
以上より, 得られた解が正しいことが分かる.

例 4 同次連立一次方程式 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 + \ \ 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 - \quad x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + \ \ x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$ を解け.

解答 同次方程式の場合は右辺の定数項はどんな行基本変形を行っても常に 0 のままである. 従って係数行列 A を作り, 掃き出し法により階段行列 B に変形すれば十分である.

$$\begin{array}{|r|rrrr|r|rrrr|r|rrrr|}
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 2 & & 1 & 2 & 1 & 2 & r_1 - r_2 & 1 & 2 & 0 & 9 \\
A = & 3 & 6 & 4 & -1 & r_2 - 3r_1 & 0 & 0 & 1 & -7 & & 0 & 0 & 1 & -7 \\
 & 2 & 4 & 1 & 11 & r_3 - 2r_1 & 0 & 0 & -1 & 7 & r_3 + r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
= \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{c}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

$$\operatorname{rank} A = 2 < 4 = (\text{未知数の個数})$$

従って この方程式は無限個の解をもち, 解の自由度は $4 - 2 = 2$ である.
解を書き下すために第 2 列と第 3 列を交換すると,

$$\begin{array}{|c|rrrr|}
\hline
\text{基本変形} & x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \\
\hline
 & 1 & 0 & 2 & 9 \\
c_2 \leftrightarrow c_3 & 0 & 1 & 0 & -7 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
= \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{e}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2 = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とおけば, t_1, t_2 を任意定数として

$$\boldsymbol{y} = t_1\boldsymbol{y}_1 + t_2\boldsymbol{y}_2 = t_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \therefore \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} = t_1\boldsymbol{x}_1 + t_2\boldsymbol{x}_2$$

と解を得る. (基本解 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は階段行列の軸列でない列 (第 2 列と第 4 列 $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2$ から構成され, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ の, 列番号と同じ行 (2, 4 行) が 1 になる.) このとき, $A = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_4]$ と列ベクトルに分割して表示すれば

$$A\boldsymbol{x}_1 = -2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}, \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a}_2 = 2\boldsymbol{a}_1,$$

$$A\boldsymbol{x}_2 = -9\boldsymbol{a}_1 + 7\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4 = -9 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 11 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}, \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a}_4 = 9\boldsymbol{a}_1 - 7\boldsymbol{a}_3$$

の様に, A の軸列 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$ の一次結合としてその他の列 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ は表される.

例 5 (単独の方程式) 方程式 $ax = b$ の解は, (i) $a \neq 0$ のとき $x = b/a$.
(ii) $a = b = 0$ のとき, 任意定数 t に対し $x = t$. (iii) $a = 0,\ b \neq 0$ のとき解なし.
未知数が $x_1, \ldots, x_4$ の方程式

(1) $x_1 + ax_2 + +bx_3 + +cx_4 = d$, (2) $x_2 + bx_3 + cx_4 = d$

の一般解は拡大係数行列が $[1\,a\,b\,c\,d]$, $[0\,1\,b\,c\,d]$ (階段行列) なので,

$$(1) \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2) \begin{bmatrix} 0 \\ d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -c \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$