

階段行列

行列を行基本変形を繰り返して簡単にするとき「最も簡単な形の行列」が階段行列である。

行列の **0** でない各行について、0 でない一番左の成分をその行の **先頭成分** という。下の例の様に、下の行になるほど先頭成分が右にずれていく行列を**行階段型の行列**といい、その先頭成分を **軸 (pivot)** (又は **軸成分**, **要 (かなめ)**), 軸を含む列を**軸列**という。特に左と中央の行列の様に、各行の軸成分が 1, 同じ列の他の成分が 0, 即ち軸列が基本ベクトルになっている行列を**階段行列** とよぶ。(下の例は連立一次方程式の解法例の行列の最終形で, $c=3, c=5$ としたもの.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

より詳しくは

定義 $m \times n$ 行列 B が 零行列 O であるか, または

[E1] ある r ($r \leq m$) について, 第 1 行から第 r 行までは零ベクトルでなく, $r < m$ なら残りの行は零ベクトルである。

[E2] 第 i 行の先頭成分を (i, q_i) 成分とすると $1 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_r \leq n$ である。(軸列は第 $q_1, q_2, \dots, q_r$ 列.)

をみたすとき **行階段型の行列** (matrix in row echelon form) といい, さらに

[E3] 第 q_i 列は基本ベクトル $e_i = {}^t[0 \dots 1 \dots 0]$ (第 i 行が 1, 他は 0) である ($i=1, \dots, r$). (i 番目の軸列は e_i .)

をみたすとき B を **階段行列** (reduced echelon matrix) という。ここに現れる r ($= B$ の **0** でない行数 = 階段の段数 = 軸列の個数) を **階数** (rank) といい, $\text{rank } B$ と表す。但し零行列 O も階段行列とし, $\text{rank } O = 0$ とする。

例 1 (階段行列) 左の行列は 4×8 階段行列で, 階数が 3, $q_1 = 2, q_2 = 4, q_3 = 7$, 即ち, 軸列は第 2, 4, 7 列であり, 右は階段行列の一般形である。

$$\begin{array}{cccccccc} & q_1 & q_2 & & q_3 & & & \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \begin{array}{ccccccc} q_1 & q_2 & \cdots & q_r \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & * & & 0 \\ & 1 & * & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} e_1 & * & e_2 & \cdots & e_r & \cdots \end{bmatrix} \end{array}$$

注意 1 行階段型の行列の列ベクトルは, $1 < q_1$ なら第 $1, \dots, (q_1-1)$ 列は **0**, $q_i \leq j < q_{i+1}$ ($q_{r+1} = n+1$) のとき 第 j 列の第 $(i+1)$ 行以下の成分は全て 0. 行階段型の行列, 特に階段行列は上三角行列であり, 階数は **0** でない行の個数なので **階数 $\leq$ 行数**. 軸列の個数でもあるので **階数 $\leq$ 列数**. 特に, 階数が次数に等しい正方階段行列は単位行列である。

例 2 (階段行列への変形) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ を階段行列に変形する。左側に基本変形を, 中央に行列を, 右側に基本行列との積を書いた表を作る: (階段行列の軸成分になる成分を $\bigcirc$ で囲んである.)

基本変形	行 列	基本行列との積	基本変形	行 列	基本行列との積	基本変形	行 列	基本行列との積
	$\begin{matrix} 0 & \textcircled{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 2 \end{matrix}$	$= A$	$\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 + 2r_1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{4} & 8 \end{matrix}$	$\begin{matrix} P_{31}(2)P_{21}(-2)A \\ = A_1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} r_2 \leftrightarrow r_3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{4} & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} P_{23}A_1 = A_2 \end{matrix}$
$\frac{1}{4}r_2$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$P_2(\frac{1}{4})A_2 = A_3$	$r_1 - 2r_2$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} P_{12}(-2)A_3 \\ = B \end{matrix}$		$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	

より B が求める階段行列で $\text{rank } B = 2$. 軸列は 2, 4. $P = P_{12}(-2)P_2(\frac{1}{4})P_{23}P_{31}(2)P_{21}(-2)$ とすれば $PA = B$ となる。

この様に, 行列 A を階段行列 B へ変形するには, B の軸列となる列 (A の **軸列** という) を探し出して, その列の 0 でない成分を選び (軸の選択という), 必要があれば行交換により B の軸の位置にあたる行に移動して軸を 0 でない様にしてから掃き出せばよい。

定理 2.2 (行簡約化定理) 行列 A は行基本変形を繰り返すことにより, 階段行列 B に変形できる。特に, (行基本変形に対応する基本行列の積である) 正則行列 P が存在して

$$B = PA \quad (P \text{ は基本行列の積である正則行列}).$$

証明 $m \times n$ 行列 $A \neq O$ を次の様に, 行の交換と掃き出し法を用いて

$$A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_r = B$$

と変形を繰り返して B を得る: ($A=O$ のときはすでに階段行列になっている.)

(I-1) (軸の選択): A の列を第 1 列から順に見て, **0** でない最初の列を第 q_1 列とし, この列の 0 でない成分 ((p_1, q_1) 成分) を選ぶ。

(I-2) (行交換) $p_1 > 1$ なら第 1 行と第 p_1 行を交換する。(このとき $(1, q_1)$ 成分は 0 でなく, $q_1 > 1$ なら第 q_1 列より左の列は **0**.)

(I-3) (掃き出し): $(1, q_1)$ 成分を 1 にして第 q_1 列を掃き出し, 得られた行列を A_1 とする。(A_1 の第 q_1 列は e_1 となる.)

(II-1) (軸の選択): A_1 の 2 行目以下, 第 (q_1+1) 列以降を順に見て, 2 行目以下が **0** でない最初の列を第 q_2 列とし, この列の 0

でない成分 $((p_2, q_2)$ 成分, $p_2 \geq 2$) を選ぶ.

(II-2) (行交換) $p_2 > 2$ なら第 2 行と第 p_2 行を交換する. (このとき $(2, q_2)$ 成分は 0 でなく, 第 q_2 列より左の列の 2 行目以下は 0.)

(II-3) (掃き出し): $(2, q_2)$ 成分を 1 にして第 q_2 列を掃き出し, 得られた行列を A_2 とする. (A_2 の第 q_2 列は e_2 となる.)

以下, 帰納的に A_{k-1} が得られたとして同様に,

(k-1) (軸の選択): A_{k-1} の k 行目以下, 第 $(q_{k-1} + 1)$ 列以降を順に見て, k 行目以下が 0 でない最初の列を第 q_k 列とし, この列の 0 でない成分 $((p_k, q_k)$ 成分, $p_k \geq k$) を選ぶ.

(k-2) (行交換) $p_k > k$ なら第 k 行と第 p_k 行を交換する. (このとき (k, q_k) 成分は 0 でなく, q_k 列より左の列の k 行目以下は 0.)

(k-3) (掃き出し): (k, q_k) 成分を 1 にして第 q_k 列を掃き出し, 得られた行列を A_k とする. (A_k の第 q_k 列は e_k となる.)

この変形を可能な限り繰り返して第 r 段階の A_r で完了したとする. ($r < m$ なら $(r+1)$ 行目以下は 0 である.)

このとき A_r が求める階段行列 B になっている.

階段行列は行交換と掃き出しを用いて構成されるので, B は基本変形に対応する基本行列 $P_1, P_2, \dots, P_k$ の積である正則行列 P を左から A に掛けたものになっている. 即ち,

$$B = P_k P_{k-1} \dots P_1 A = PA, \quad P = P_k P_{k-1} \dots P_1.$$

注意 2 階段行列は行交換と掃き出しを用いて構成されるので A が実行列ならば階段行列 B も実行列になる. また, A が有理行列ならば B も有理行列になる. 行階段型の行列は各軸を 1 にして列を掃き出せば階段行列になるので, この変形によりこれらの階数および軸の位置は変わらない. また, 行列を行階段型の行列に変形するには階段行列への変形と同様に軸の選択, 必要なら行交換を行った後に軸成分より下を掃き出す, 即ち, 軸より下の成分を 0 にすればよい. 従って階数を求めるなら行階段型の行列に変形すれば求まり, 一般には階段行列に変形するよりも計算量が少なく済む.

定理 2.3 (階段行列の一意性) 行列 A の階段行列および階数は変形の仕方によらず一意的に定まる.

証明 $A \neq O$ とし, A の 2 つの階段行列を $B = P_1 A$, $C = P_2 A$ とするとき $B = C$ を示せば良い. B, C の階数をそれぞれ r', r ($r' \geq r$) とし, B の軸列は $s_1, \dots, s_{r'}$, C の軸列は $t_1, \dots, t_r$ とする. このとき B には少なくとも e_r までは含まれるので,

$$B = P_1 A = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n] = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_r & (s_{r'}) \\ e_1 & * & e_2 & \dots & e_r \end{bmatrix} = [b_{ij}],$$

$$C = P_2 A = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_r \\ e_1 & * & e_2 & \dots & e_r \end{bmatrix} = [c_{ij}]$$

と表せる. $P = P_1 P_2^{-1}$ とおけば $PC = (P_1 P_2^{-1})(P_2 A) = P_1 A = B$ より $PC = B$, $Pc_j = b_j$ ($j=1, \dots, n$):

$$PC = [0 \ \dots \ 0 \ Pe_1 * Pe_2 \ \dots \ Pe_r \ \dots] = [0 \ \dots \ 0 \ e_1 * e_2 \ \dots \ e_r \ \dots] = B.$$

また, $P = [p_1 \ \dots \ p_m]$ とすれば $Pe_j = p_j$ で P は正則だから $p_j \neq 0$ ($j=1, \dots, m$).

(1.1) $t_1 \neq 1, 1 \leq j < t_1$ のとき $c_j = 0$ より $b_j = P0 = 0$.

(1.2) $j = t_1 \geq 1$ のとき $c_j = e_1$ より $b_j = Pc_j = Pe_1 = p_1 \neq 0$.

B は階段行列なので 0 でない最初の列は第 s_1 列で, それは e_1 だから

$$s_1 = j = t_1, \quad b_j = e_1, \quad \therefore p_1 = e_1, \quad P = [e_1 \ *] = \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{bmatrix}.$$

(2.1) $C = [c_{ij}]$ は階段行列なので, $t_1 < j < t_2$ のとき c_j の 2 行目以下は 0 だから $c_j = e_1 c_{1j}$ と表せる. これより

$b_j = P(e_1 c_{1j}) = (Pe_1) c_{1j} = e_1 c_{1j} \neq e_2$. $\therefore j < t_2$ のとき $j < s_2$. $\therefore t_2 \leq s_2$ を得る.

$C = P^{-1}B$ なので B と C を入れ替えて同様にすれば $s_2 \leq t_2$, 合わせて $s_2 = t_2$ を得る.

(2.2) $j = s_2 = t_2$ のとき

$c_j = c_{t_2} = e_2$, $b_j = b_{s_2} = e_2$ と $b_j = Pc_j = Pe_2 = p_2$ より

$$s_2 = t_2, \quad p_2 = e_2, \quad \therefore P = [e_1 \ e_2 *] = \begin{bmatrix} E_2 & * \\ O & * \end{bmatrix}.$$

以下同様にして $t_{k-1} < j < t_k$ ($k \leq r$) のとき c_j の k 行目以下は 0 だから $c_j = \sum_{1 \leq i < k} e_i c_{ij}$ と表せ, $p_i = e_i$ ($i < k$) なので,

$$b_j = Pc_j = P\left(\sum_{1 \leq i < k} e_i c_{ij}\right) = \sum_{1 \leq i < k} e_i c_{ij} \neq e_k \text{ より } s_k = t_k, \quad p_k = e_k, \quad (k = 3, \dots, r), \quad P = [e_1 \ \dots \ e_r *] = \begin{bmatrix} E_r & P_{12} \\ O & P_{22} \end{bmatrix}$$

を得る. C の $(r+1)$ 行目以下は零行列 O だから C を分割して

$$B = PC = \begin{bmatrix} E_r & P_{12} \\ O & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ O \end{bmatrix} = C. \quad \therefore r' = r.$$

よって 階段行列の一意性が示された.

定理 2.3 により行列 A から定まる階段行列 B は唯一つなので, 以後, B を A の階段行列ということにする. また, B の軸列 (第 $q_1, \dots, q_r$ 列) に対応する A の列 (第 $q_1, \dots, q_r$ 列) を A の軸列ということにする. 行列 A の階数を A の階段行列 B の階数と定め $\text{rank } A$ と表す. 即ち

階数

$\text{rank } A = \text{rank } B = A$ の階段行列 B の零ベクトルでない行の個数 $= A$ の階段行列 B の軸列の個数.