

行列の分割 行列はいくつかの縦線と横線で区切って2つ以上の行列に分割して表すと便利なことも多い。行列の行分割, 列分割もその一例である。また例えば 行列 A のある分割は

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \\ R = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} a_{33} \end{bmatrix}$$

の中辺の様に幾つかの縦線と横線で区切って表されたり, 右辺の様に区切り線を除いて表される。ここで, P と Q , R と S の行数はそれぞれ等しく, P と R , Q と S の列数もそれぞれ等しい。

分割された P, Q などの小さな行列を A の **小行列**, または **ブロック** という。また, 分割は **区分け** や **ブロック分割** とも呼ばれる。一般には $(p-1)$ 個の横線と $(q-1)$ 個の縦線で区切り,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix}$$

の様に表される。正方行列においては, 対角成分に当たる A_{ii} がすべて正方行列になる様な分割が重要であり, 縦横が対称なので **対称分割** と呼ばれる。

分割された行列の和, スカラー倍, 積は, 行列の和, スカラー倍, 積と同様に計算出来る。積については次ページで述べる。例えば積について

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{bmatrix}$$

ここで $A_1B_1 + A_2B_3$ などの積や和が定義される為に, A の列数と B の行数は等しく, A の列の分け方と B の行の分け方も等しい, 即ち, A_1, A_2 の列数と B_1, B_3 の行数がそれぞれ等しくなる様に分割されている必要がある。(従って A_3, A_4 の列数と B_2, B_4 の行数もそれぞれ等しい。) また, 積の順序は交換できない。これを用いれば $A_3 = O, B_3 = O$ (ブロック上三角型) のとき (特に $A_2 = O, B_2 = O$, ブロック対角型) のとき

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ O & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ O & A_4B_4 \end{bmatrix} \quad \left(AB = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & O \\ O & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 & O \\ O & A_4B_4 \end{bmatrix} \right).$$

転置行列については,

$${}^tA = \begin{bmatrix} {}^tA_1 & {}^tA_3 \\ {}^tA_2 & {}^tA_4 \end{bmatrix}, \quad {}^tA = [{}^t\mathbf{a}^1, {}^t\mathbf{a}^2, \dots, {}^t\mathbf{a}^m], \quad \text{など.}$$

問 次の行列の積を計算せよ。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 10 & 13 & 0 \\ 22 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \right)$$

問 次の分割された行列は積が定義されるものとして, 積を計算せよ。(E は単位行列.)

$$\begin{array}{lll} (1) \begin{bmatrix} P & O \\ O & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} & (2) \begin{bmatrix} E & X \\ O & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} & (3) \begin{bmatrix} O & E \\ E & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \\ (4) \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & O \\ O & P \end{bmatrix} & (5) \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & X \\ O & E \end{bmatrix} & (6) \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & E \\ E & O \end{bmatrix} \end{array}$$

定理 1.3 (分割された行列の積)

$l \times m$ 行列 $A = [a_{ij}]$, $m \times n$ 行列 $B = [b_{ij}]$ とそれらの積 $C = AB = [c_{ij}]$ が

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{q1} & B_{q2} & \cdots & B_{qr} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{p1} & C_{p2} & \cdots & C_{pr} \end{bmatrix}$$

と分割されていて, A_{st} が (l_s, m_t) 型, B_{tu} が (m_t, n_u) 型, C_{su} が (l_s, n_u) 型とする. 即ち A_{st} と B_{tu} は積の取れる型, C_{su} はそれらの積の型となる様分割されているとする. ここで

$$l = l_1 + \cdots + l_p, \quad m = m_1 + \cdots + m_q, \quad n = n_1 + \cdots + n_r$$

である. このとき

$$(1) \quad C_{su} = \sum_{t=1}^q A_{st} B_{tu} = A_{s1} B_{1u} + \cdots + A_{sq} B_{qu}$$

が成り立つ. 即ち分割された行列の積は通常の行列の積と同様に計算される.

証明 添え字の対応のみが問題である:

(1) の両辺の (v, w) 成分が等しいこと, つまり $(C_{su})_{vw} = (\sum_{t=1}^q A_{st} B_{tu})_{vw}$ を示す.

C の (i, j) 成分 c_{ij} が C_{su} の (v, w) 成分 $(C_{su})_{vw}$ に対応しているとする. 即ち

$$i = l_1 + \cdots + l_{s-1} + v, \quad j = n_1 + \cdots + n_{u-1} + w$$

とする. また

$$M_t = m_1 + \cdots + m_{t-1} \quad (t = 1, \dots, q+1 \quad \text{ただし } M_1 = 0, \quad M_{q+1} = m), \quad k = M_t + h$$

とすると, A_{st} の (v, h) 成分 $(A_{st})_{vh}$ が A の (i, k) 成分 a_{ik} に B_{tu} の (h, w) 成分 $(B_{tu})_{hw}$ が B の (k, j) 成分 b_{kj} に対応している. このとき

$$\begin{aligned} (A_{st} B_{tu})_{vw} &= \sum_{h=1}^{m_t} (A_{st})_{vh} (B_{tu})_{hw} = \sum_{k=M_t+1}^{M_t+m_t} a_{ik} b_{kj} \quad (M_t + m_t = M_{t+1}), \\ (C_{su})_{vw} &= c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} = \sum_{t=1}^q \sum_{k=M_t+1}^{M_t+m_t} a_{ik} b_{kj} = \sum_{t=1}^q (A_{st} B_{tu})_{vw} = \left(\sum_{t=1}^q A_{st} B_{tu} \right)_{vw} \end{aligned}$$

より定理は証明された.